Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. P. Sanders, Dr. S. Gog
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

2. Übungsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,gog,huebschle,t.maier}@kit.edu

Musterlösungen

Aufgabe 1 (*Induktion + Chomsky-1,* $3+4$ *Punkte*)

a) Zeigen sie induktiv: mit Hilfe der Produktionen P_{rev} lassen sich Folgen von Nichtterminalen zu umgekehrt geordneten Folgen von entsprechenden Terminalen umsortieren. Dabei wird das Nichtterminal M verwendet um das Wortende zu markieren. *Beispiel:* $AABAM \Rightarrow^* abaaM$
Formell: $\forall N_1, ..., N_n \in \{A, B\}$
$wM = N_1...N_nM \quad \Rightarrow^*_{P_{rev}} \quad X_n...X_1M = (w')^rM$
$X_i = \begin{cases} a & \textit{falls } N_i = A \\ b & \textit{falls } N_i = B \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
P_{rev} = \{ & Aa \to aA, \\
& Ab \to bA, \\
& Ba \to aB, \\
& Bb \to bB, \\
& AM \to aM, \\
& BM \to bM\}
\end{aligned}
$$

b) Konstruieren sie eine Chomsky-1 Grammatik, die die Sprache L_{ww} erzeugt $L_{ww} = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ (Tipp: erzeugen sie zuerst ein Wort $\approx ww^r$ und verwenden sie danach Techniken vergleichbar zu P_{rev} um w^r um zu ordnen).

Musterlösung:

a) Induktion über die Worlänge:
IA: $n = 0$ $wM = \varepsilon M$, es gilt $(\varepsilon')^r = \varepsilon$
IV: Für ein festes aber allgemeines n gilt: Für alle $w \in \{A, B\}^*$ mit $|w| \leq n$ lässt sich $(w')^rM$ mit den oben gewünschten Eigenschaften aus wM ableiten.
IS: $n+1$: Gegeben einem Wort $w \in \{A, B\}^*$ mit $|w| = n+1$.

1.Fall: $wM = Aw_nM$	$\Rightarrow^* A(w'_n)^rM$	laut IV
	$\Rightarrow^* (w'_n)^rAM$	mit Hilfe der Produktionen 1 und 2
	$\Rightarrow (w'_n)^r aM = (w')M$	
2.Fall: $wM = Bw_nM$	analog	

b) $G = (\{S, T, A, B, A_e, B_e\}, \{a, b\}, P, S)$

$$\begin{aligned}
P = \{S &\rightarrow TaA_e \mid TbB_e \mid aa \mid bb\varepsilon,\\
T &\rightarrow aTA \mid bTB \mid aA \mid bB,\\
Aa &\rightarrow aA,\\
Ab &\rightarrow bA,\\
Ba &\rightarrow aB,\\
Bb &\rightarrow bB,\\
AA_e &\rightarrow aA_e,\\
AB_e &\rightarrow aB_e,\\
BA_e &\rightarrow bA_e,\\
BB_e &\rightarrow bB_e,\\
A_e &\rightarrow a,\\
B_e &\rightarrow b, \}
\end{aligned}$$

beachte: die Grammatik darf Sackgassen haben (Ableitungspfade, die nicht in einem Wort aus Terminalsymbolen Enden). Sie darf aber natürlich keine Wörter erzeugen, die nicht in der Sprache liegen. Desweiteren ist zu beachten, dass in Chomsky-1 die rechte Seite einer Abkürzung immer länger (oder gleich) sein muss wie die linke Seite. Dementsprechend ist die Ableitung von ε nur aus S erlaubt. Dies sollte jedoch nur zu geringem Abzug führen.

Aufgabe 2 (*Sprachen und Automaten,* $2 + 2 + 1 + 2$ *Punkte*)

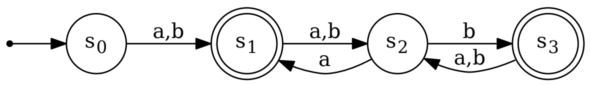
Geben Sie für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$ deterministische endlichen Automaten (DEA) an, die exakt dieselbe Sprache erkennen.

a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid n_a(w) \mod 3 > n_b(w) \mod 2\}$

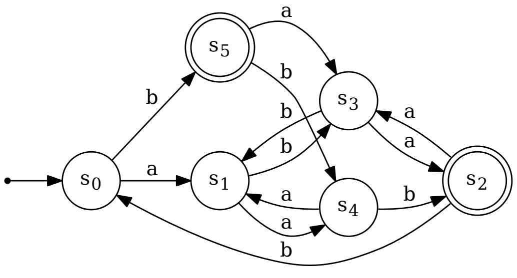
b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } abab\}$

Geben Sie für die nachfolgenden Automaten an, welche Sprachen diese akzeptieren.

c)

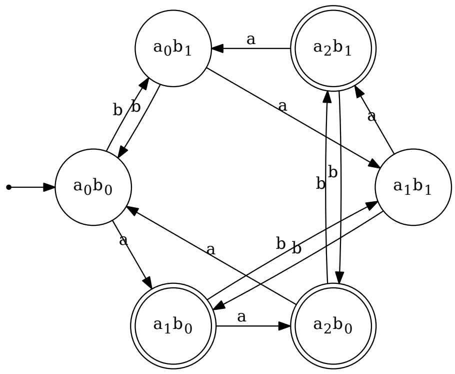


d)

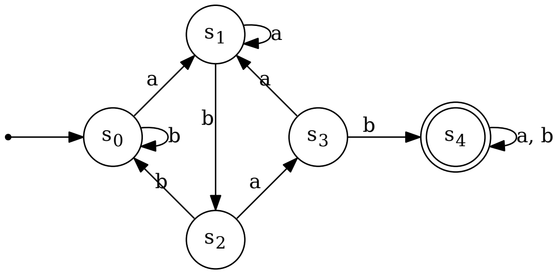


Musterlösung:

a) Die Darstellung ist hier nicht optimal, im Grunde ist es ein $2 \times 3-$Gitter, das in die eine Richtung as und in die andere Richtung bs zählt.



b) Hier gibt es zwei Lösungsansätze: Entweder man konstruiert zuerst einen NEA und determinisiert diesen anschließend, oder man konstruiert direkt einen passenden DEA.



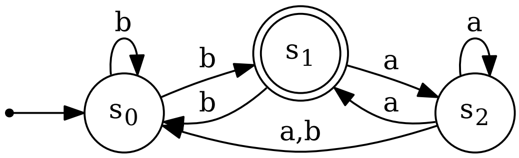
c) $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \mod 2 = 1\}$ (Worte ungerader Länge)

d) $L = \{w \in \Sigma^* \mid n_a(w) \mod 2 = 0 \wedge n_b(w) \mod 2 = 1\}$ (Worte mit gerader Anzahl as und ungerader Anzahl bs)

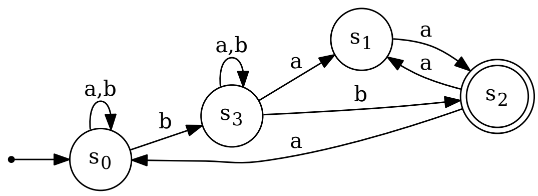
Aufgabe 3 (*Potenzmengenkonstruktion,* $3 + 4$ *Punkte*)

Überführen Sie die folgenden nichtdeterministischen endlichen Automaten (NEA) über dem Alphabet $\{a, b\}$ mit der Potenzmengenkonstruktion in äquivalente deterministische endliche Automaten (DEA).

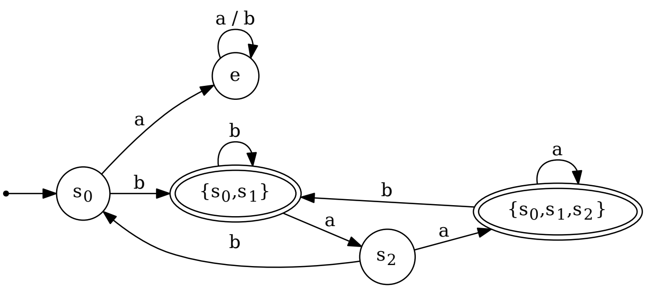
a)



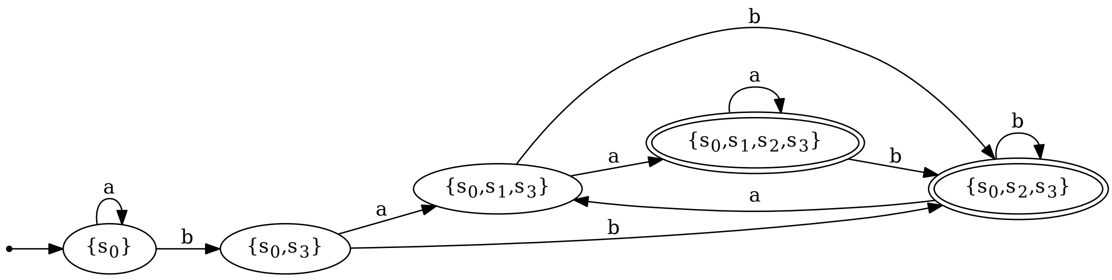
b)



Musterlösung:



a)



b)