Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

3. Übungsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

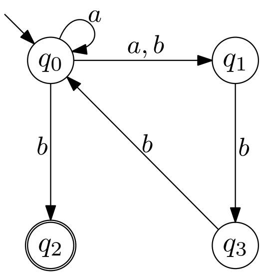
http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Musterlösungen

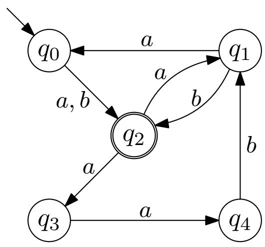
Aufgabe 1 (*Potenzmengenkonstruktion*, $3+3$ *Punkte*)

Verwenden sie die Potenzmengenkonstruktion, um die folgenden nicht-deterministischen Automaten in deterministische Automaten umzuwandeln (Tabelle). Zeichnen sie die Ergebnisautomaten kreuzungsfrei.

a)



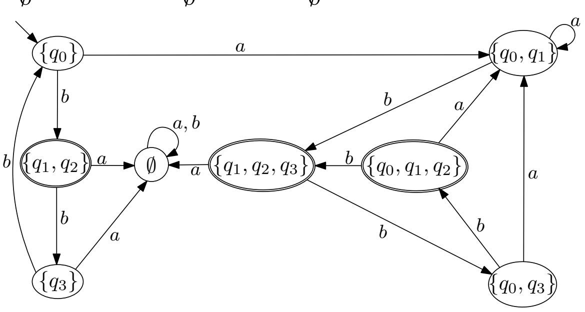
b)



Musterlösung:
Die regulären Ausdrücke der Sprachen waren nicht gefordert, sie sind nicht aufgabenrelevant.

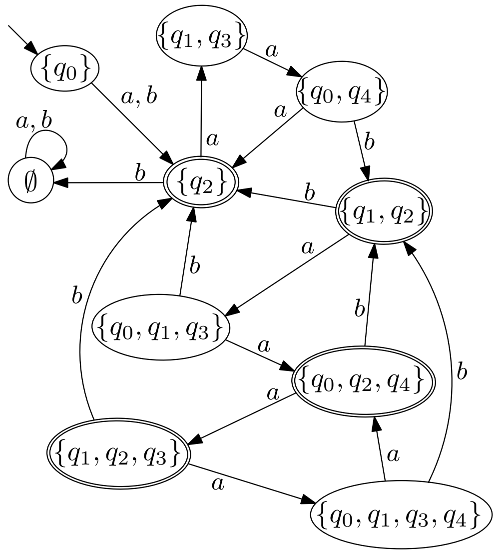
a) $(a \cup abb \cup bbb) * b$

$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



b) $(a \cup b)((a \cup aab)(b \cup aa \cup ab))*$

$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\emptyset$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_4\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



Aufgabe 2 (*Regularität von Sprachen,* $3+3+3$ *Punkte*)

Sind die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ regulär? Beweisen oder widerlegen Sie!

a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$

b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid$ Anzahl Vorkommen der Substrings ab und ba ist gleich$\}$
(z.B. *bab*, *babbb*, *abba* oder *a*, **nicht aber** *abab*)

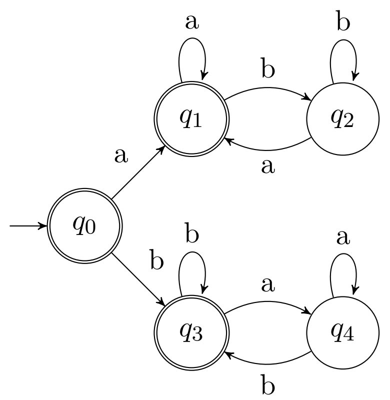
c) $L_3 = \{a^{k^2} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Musterlösung:

a) Nicht regulär. Pumping-Lemma: Angenommen, L_1 sei regulär. Dann sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma und $w = a^n b a^n$. Offensichtlich gilt $w = w^R$, also $w \in L_1$ und $|w| = 2n + 1 \geq n$. Zerlege w in Teilworte $w = uvx$ sodass $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gemäß des Pumping-Lemmas. Daher ist jede Zerlegung von der Form $u = a^k$, $v = a^\ell$, $x = a^{n-k-\ell} b a^n$ mit $k \geq 0$, $\ell \geq 1$ und $k + \ell \leq n$.

Jetzt gilt es noch zu zeigen, dass für mindestens ein $i \geq 0$ das Wort $uv^i x \notin L_1$. Betrachte $i = 2$, dann $w' = uv^2x = a^k a^\ell a^\ell a^{n-k-\ell} b a^n = a^{n+\ell} b a^n \neq a^n b a^{n+\ell} = w'^R$ da $\ell \geq 1$. Daher liegt w' nicht in L_1, was im Widerspruch zur Annahme liegt. Somit ist L_1 nicht regulär.

b) Auch wenn es zuerst nicht so aussieht, diese Sprache ist regulär! Automat:



c) Nicht regulär. Unter der Annahme, dass L_3 regulär sei, sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma und $w = a^{n^2} = a^u a^v a^w \in L_3$. Es gilt also $n^2 = u+v+w$ mit $u+v \leq n$ und somit $v \leq n$. Außerdem gehört nach dem Pumping-Lemma $a^u a^{2v} a^w$ ebenfalls zur Sprache, weshalb auch $u + 2v + w$ eine Quadratzahl sein muss. Wir schätzen $u + v + w$ nach oben ab:

$$
\begin{aligned}
n^2 &= u + v + w \\
&< u + 2v + w && \text{da } v \geq 1 \\
&= n^2 + v \\
&\leq n^2 + n && \text{da } v \leq n \\
&< (n+1)^2 && \text{nach der ersten binomischen Formel}
\end{aligned}
$$

Also kann $u + 2v + w$ nicht Quadratzahl sein, und die Sprache ist somit nicht regulär.

Aufgabe 3 (*Wissensfragen,* 5 *Punkte*)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie *kurz.*

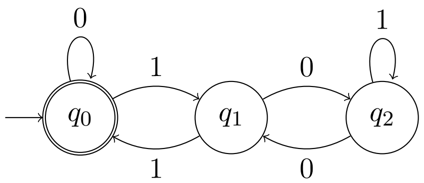
a) Das Pumping-Lemma genügt, um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist.

b) Zu jeder endlichen Sprache L gibt es eine Chomsky-Grammatik G vom Typ 3 mit $L(G) = L$.

c) Die regulären Ausdrücke $a^*(b^* \cup c^*)$ und $a^*(b \cup c)^*$ sind äquivalent.

d) Wenn es für jedes Wort $w \in L$ einen deterministischen endlichen Automaten A_w gibt, der w akzeptiert, dann ist L regulär.

e) Der folgende Automat erkennt alle durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen in Binärdarstellung.



Musterlösung:

a) Falsch, es gibt auch nichtreguläre Sprachen, die sich "aufpumpen" lassen

b) Wahr, da die Sprache endlich ist, lässt sich einfach für jedes Wort $w = c_1c_2 \ldots c_n$ eine Abfolge von Produktionen $S \to c_1P_1$, $P_1 \to c_2P_2$, $\ldots$, $P_{n-1} \to c_n$ konstruieren und sich sämtliche möglichen ersten Produktionen verodern (die anderen Regeln müssen natürlich getrennt bleiben).

c) Nein, das Wort bc kann vom zweiten, nicht aber vom ersten regulären Ausdruck erzeugt werden

d) Nein, denn es gibt für jedes Wort w jeder beliebigen Sprache einen solchen DEA A_w, aber es gibt nichtreguläre Sprachen.

e) Korrekt. Die möglichen Reste bei Division durch 3 sind 0, 1, und 2 und werden durch die Zustände q_0, q_1 und q_2 repräsentiert.

- Beim Anhängen einer 0 an die Zahl wird diese verdoppelt, was wiederum ihren Rest bei Division durch 3 verdoppelt (modulo 3) - Rest 0 bleibt Rest 0, Rest 1 wird zu Rest 2, Rest 2 wird zu Rest 1, da $4 = 1 \pmod 3$.
- Beim Anhängen einer 1 an die Zahl wird diese verdoppelt und eins darauf addiert. Selbiges geschieht mit dem Rest: Rest 0 wird Rest 1, Rest 1 wird Rest 0 da $3 = 0 \pmod 3$, Rest 2 bleibt 2 da $5 = 2 \pmod 3$.

Dies beschreibt genau die Zustandsübergangsfunktion des gegebenen Automaten.