Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

6. Übungsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Musterlösungen

Aufgabe 1 (*Turingmaschinenkonstruktion,* $4 + 5$ *Punkte*)

Entwerfen Sie für die folgenden Sprachen Turingmaschinen $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$, die genau die jeweilige Sprache akzeptieren. Erläutern Sie kurz die Funktionsweise Ihrer Lösung und welche Funktion jeder Zustand erfüllt.

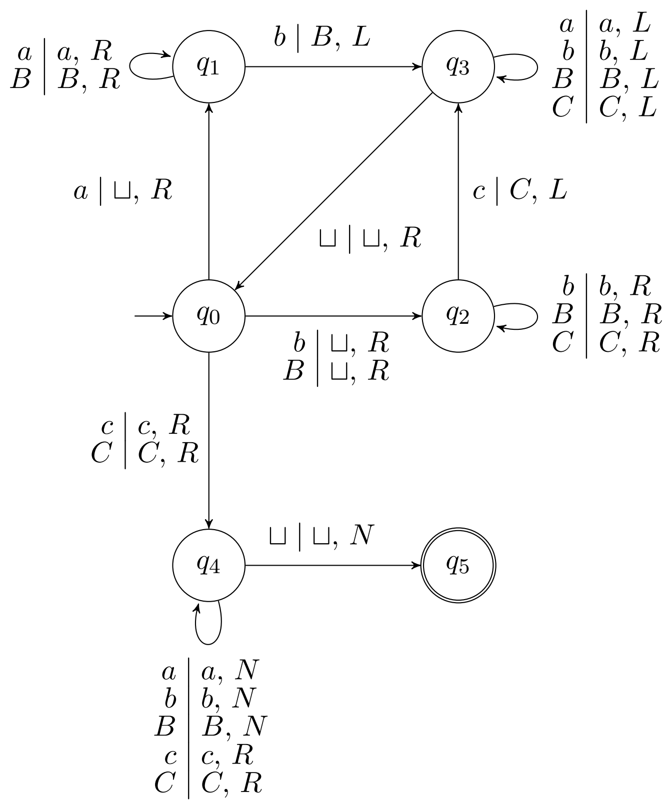
a) $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$ über $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$. Gesucht ist eine *deterministische* Turingmaschine mit maximal 8 Zuständen.

b) $L_2 = \{w\#x \mid w \in \{a, b\}^* \text{ ist Teilwort von } x \in \{a, b\}^*\}$ über $\Sigma_2 = \{a, b, \#\}$. Gesucht ist eine *nichtdeterministische* Turingmaschine mit höchstens 9 Zuständen.

Für jeden weiteren Zustand wird ein Punkt abgezogen.

Musterlösung:

a) Sei $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0, \{q_5\})$ mit $Q_1 = \{q_0, \ldots, q_5\}$ und $\Gamma_1 = \{a, b, c, B, C, \sqcup\}$. Die Übergangsrelation δ_1 ist gegeben durch die folgende Zeichnung.



Die Maschine markiert für jedes a (das sie löscht) das nächste b, indem sie es zum B macht und zurück zum Anfang läuf. Sobald alle as gelöscht sind, wiederholt sich das selbe Spiel, indem für jedes gelöschte b oder B ein c markiert wird. Am Ende dürfen nur cs bzw Cs übrig sein.

q_0 löscht das erste Zeichen der Eingabe, wenn dieses ein a oder b (bzw B) ist, und geht dann in einen Zustand über, der letztendlich ein b oder c durch seine Großbuchstabenvariante ersetzt. Wenn das Zeichen ein c (bzw C) ist, geht q_0 in den akzeptanzvorbereitenden Zustand q_4 über.

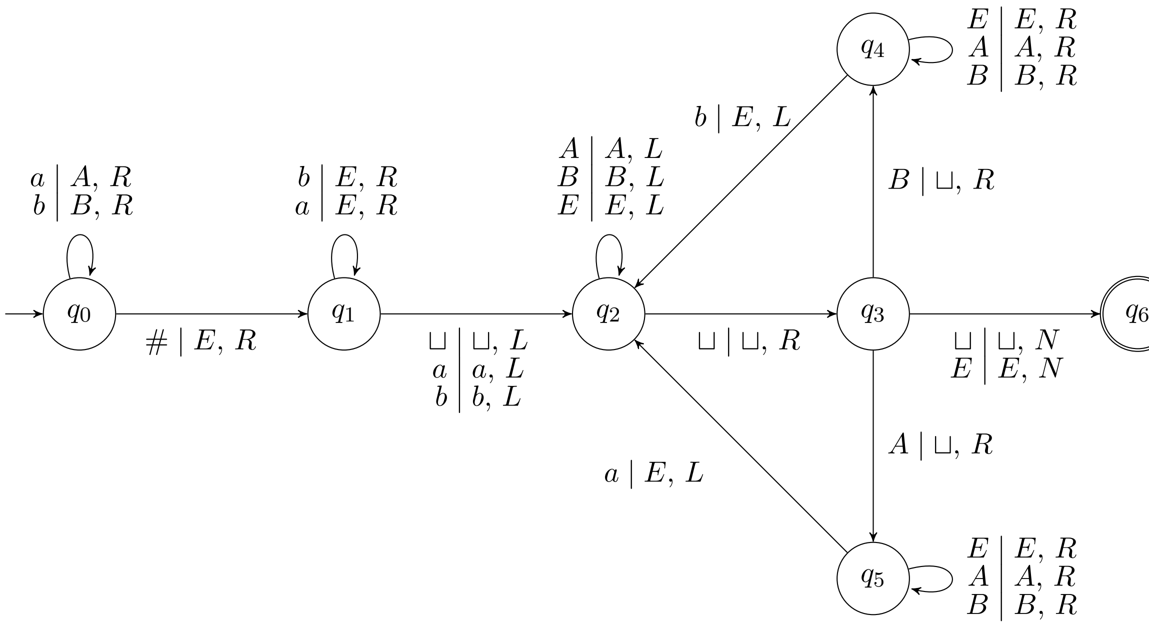
q_1 läuft as und bereits abgearbeitete bs in Form von Bs nach rechts ab, um zum nächsten b zu gelangen. Dieses ersetzt es durch ein B.

q_2 verhält sich wie q_1, aber für bs und cs.

q_3 läuft das Wort zurück zum Anfang ab.

q_4 überprüft, dass wirklich nur noch cs (bzw Cs) folgen, und hält ansonsten nichtakzeptierend.

b) Sei $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \delta_2, q_0, \{q6\})$ mit $Q_2 = \{q_0, \ldots, q_6\}$, $\Gamma_2 = \{a, b, \#, A, B, E, \sqcup\}$. Der folgende Zustandsübergangsgraph spezifiziert δ_2.



Die Maschine errät den Beginn von w in x und ersetzt alle vorherigen Zeichen von x sowie das Trennsymbol mit Es. Dann löscht sie das erste Zeichen von w, findet das korrepsondierende Zeichen in x, und ersetzt dieses ebenfalls durch ein E. Dieser zweite Teil wiederholt sich so lange, bis w vollständig abgearbeitet ist.

Zustand q_0 "markiert" das erste Wort, in dem a durch A und b durch B ersetzt wird. Dann wird das Trennzeichen durch E ersetzt. E steht hier für bereits abgearbeitete, im weiteren Verlauf nicht wichtige Zeichen.

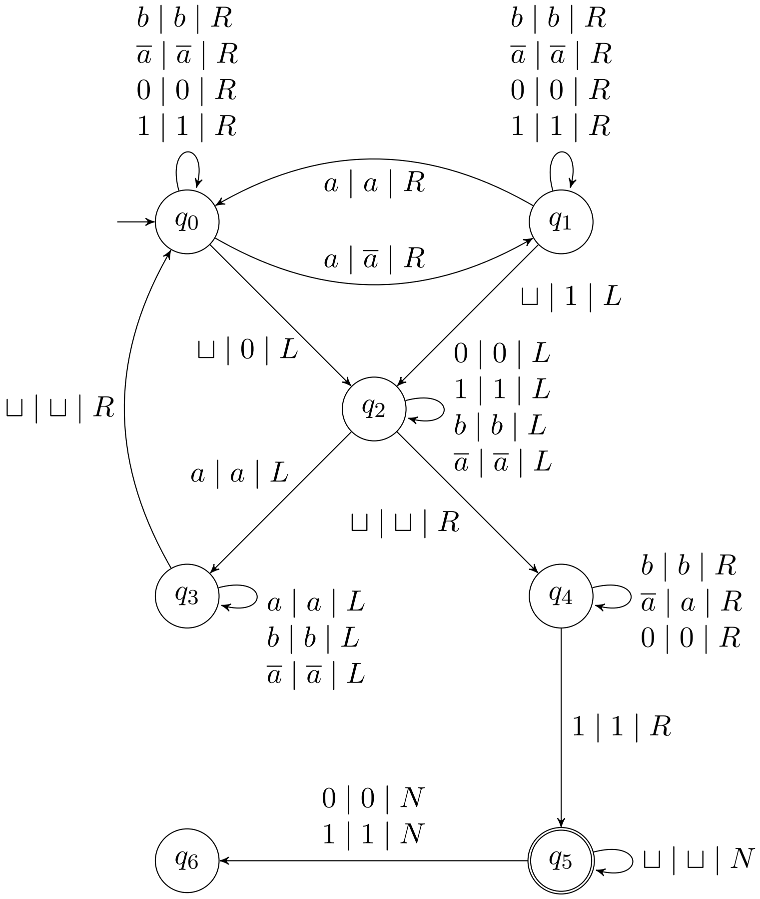
q_1 ersetzt die "richtige" Anzahl as und bs durch Es. In einem akzeptierenden Durchlauf ist das das Präfix von w, das nicht matched – d.h. für $x = vwy$ wird das Präfix v als unwichtig markiert. Dann geht q_1 nichtdeterministisch nach q_2 über.

q_2 läuft das Wort zum Anfang zurück.

q_3 entscheidet anhand des ersten noch nicht abgearbeiteten Zeichens von w, ob ein a oder b gefunden werden muss. Da die Zeichen von w durch A und B kodiert sind, müssen as und bs zu x gehören. Das erste passende Zeichen wird dann gelöscht.

q_4 und q_5 laufen das Wort nach rechts durch, bis das erste b bzw a gefunden wird. Dieses wird durch ein E ersetzt, da es nun gefunden (d.h. abgearbeitet) wurde, und die Schleife wiederholt sich durch den Übergang nach q_2 mit dem verbleibenden Teil ws. Sobald das erste Bandsymbol ein E ist (oder das Band vollständig leer ist), hält die Maschine und akzeptiert die Eingabe, da dann alle Zeichen von w gefunden wurden. Dies ist die Funktion des Übergangs nach q_6.

Aufgabe 2 (*Beschreibung einer Turingmaschine, $2+3+2$ Punkte*)



a) Simulieren Sie die beschriebene Turingmaschine auf der Eingabe $abaaa$ (beginnen sie bei $(q_0)abaaa$ und dokumentieren Sie jede Konfiguration).

b) Welche Aufgabe erfüllt die Zustandsmenge $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ (Eingaben sind in $\{a, b\}^*$)?

c) Welche Sprache akzeptiert die Turingmaschine?

Musterlösung:

a) Korrekturhinweis: kleine Fehler z.B. vergessen die $\overline{a}$s durch as zu ersetzen oder kleine Fehler bei Richtungsänderungen des Kopfes führen zu einem Punkt Abzug. Regelmäsiges Auslassen von Zuständen oder mehrere Fehler geben zwei Punkte Abzug. Sehr kleine Fehler können auch ohne Abzug bleiben, so lange es sich um Einzelfälle handelt.

$\sqcup(q_0)abaaa$
$\sqcup\overline{a}(q_1)baaa$
$\sqcup\overline{a}b(q_1)aaa$
$\sqcup\overline{a}ba(q_0)aa$
$\sqcup\overline{a}ba\overline{a}(q_1)a$
$\sqcup\overline{a}ba\overline{a}a(q_0)\sqcup$
$\sqcup\overline{a}ba\overline{a}(q_2)a0$
$\sqcup\overline{a}ba(q_3)\overline{a}a0$
$\sqcup\overline{a}b(q_3)a\overline{a}a0$
$\sqcup\overline{a}(q_3)ba\overline{a}a0$
$\sqcup(q_3)\overline{a}ba\overline{a}a0$
$(q_3)\sqcup\overline{a}ba\overline{a}a0$
$\sqcup(q_0)\overline{a}ba\overline{a}a0$

$\sqcup\overline{a}(q_0)ba\overline{a}a0$
$\sqcup\overline{a}b(q_0)a\overline{a}a0$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}(q_1)\overline{a}a0$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}(q_1)a0$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}a(q_0)0$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}a0(q_0)\sqcup$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}a(q_2)00$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}(q_3)a00$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}(q_3)\overline{a}a00$
$\sqcup\overline{a}b(q_3)\overline{a}\overline{a}a00$
$\sqcup\overline{a}(q_3)b\overline{a}\overline{a}a00$
$\sqcup(q_3)\overline{a}b\overline{a}\overline{a}a00$
$(q_3)\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}a00$

$\sqcup(q_0)\overline{a}b\overline{a}\overline{a}a00$
$\sqcup\overline{a}(q_0)b\overline{a}\overline{a}a00$
$\sqcup\overline{a}b(q_0)\overline{a}\overline{a}a00$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}(q_0)\overline{a}a00$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}(q_0)a00$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}\overline{a}(q_1)00$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}\overline{a}0(q_1)0$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}\overline{a}00(q_1)\sqcup$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}\overline{a}0(q_2)01$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}\overline{a}(q_2)001$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}(q_2)\overline{a}001$
$\sqcup\overline{a}b\overline{a}(q_2)\overline{a}\overline{a}001$
$\sqcup\overline{a}b(q_2)\overline{a}\overline{a}\overline{a}001$
$\sqcup\overline{a}(q_2)b\overline{a}\overline{a}\overline{a}001$
$\sqcup(q_2)\overline{a}b\overline{a}\overline{a}\overline{a}001$
$(q_2)\sqcup\overline{a}b\overline{a}\overline{a}\overline{a}001$
$\sqcup(q_4)\overline{a}b\overline{a}\overline{a}\overline{a}001$
$\sqcup a(q_4)b\overline{a}\overline{a}\overline{a}001$
$\sqcup ab(q_4)\overline{a}\overline{a}\overline{a}001$
$\sqcup aba(q_4)\overline{a}\overline{a}001$
$\sqcup abaa(q_4)\overline{a}001$
$\sqcup abaaa(q_4)001$
$\sqcup abaaa0(q_4)01$
$\sqcup abaaa00(q_4)1$
$\sqcup abaaa001(q_5)\sqcup$

b) Die Zustände $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ zählen die Vorkommen von a innerhalb der Eingabe ($n_a(\cdot)$). Die Anzahl wird binärcodiert neben das eingegebene Wort geschrieben (gespiegelt). Sie tut dies indem sie rekursiv die Hälfte aller as durch $\overline{a}$s ersetzt. Je nachdem ob die Anzahl gerade oder ungerade ist wird eine 0 oder eine 1 in die Binärdarstellung geschrieben

c) Die Turingmaschine akzeptiert alle Worte der Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid n_a(w) = 2^k\}$. Nachdem die Binärdarstellung von $n_a(w)$ berechnet wurde (siehe Aufgabenteil *b*) stellt die Turingmaschine sicher, dass die Darstellung nur genau eine 1 enthält (höchstwertiges Bit).

Aufgabe 3 (*Wiederholungsaufgaben,* 1 + 2 + 1 *Punkte*)

Beweisen oder widerlegen Sie (ein reiner Verweis auf die Vorlesung genügt nicht).

a) Die Sprache $\overline{L_{Palindrom}} = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \neq w^R\}$ ist kontextfrei.

b) Zu jedem nichtdeterministischen Kellerautomaten gibt es einen deterministischen Kellerautomaten, der die selbe Sprache akzeptiert.

c) Um das Komplement $\overline{L(\mathcal{M})}$ der Sprache einer Turingmaschine $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, F)$ zu erkennen, genügt es die akzeptierenden und nichtakzeptierenden Zustände zu vertauschen ($F' = Q \setminus F$).

Musterlösung:

a) Stimmt! Grammatik: $G = (\{S, E\}, \{a, b\}, P, S)$

$$\begin{aligned} P = \{&S \to aSa \mid bSb \mid aEb \mid bEa, \\ &E \to aEa \mid aEb \mid bEa \mid bEb \mid \varepsilon\} \end{aligned}$$

b) Dies ist im allgemeinen nicht wahr! Betrachte die Palindromsprache, beim einmaligen durchlaufen eines Wortes kann der deterministische Kellerautomat nicht wissen, wann die Mitte erreicht ist.

c) Falsch! Beachte: Chomsky-0 enthält genau die Sprachen, die von Turingmaschinen akzeptiert werden können. Chomsky-0 ist aber nicht unter Komplementbildung abgeschlossen. Dementsprechend kann das gegebene Verfahren nicht funktionieren.