Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

7. Übungsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Wir verwenden in der Übung die Konvention, dass eine Turingmaschine die Eingabe genau dann akzeptiert, wenn sie in einem Endzustand hält.

Aufgabe 1 (*Turingmaschinenkonstruktion,* $2 + 3 + 2$ *Punkte*)

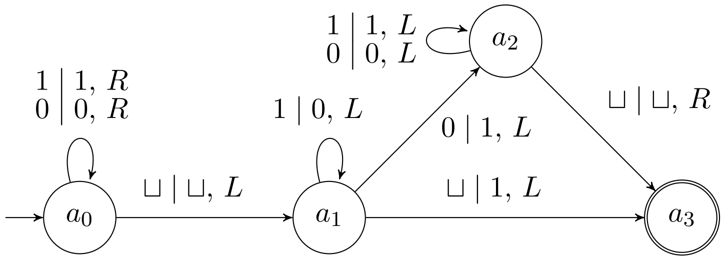
Das Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion einer deterministischen Turingmaschine für Binärzahladdition. Die Maschine soll führende Nullen in der Eingabe erlauben, die Ausgabe darf jedoch keine führenden Nullen enthalten. Auf den Vorlesungsfolien ist bereits eine Maschine für Inkrementation einer Binärzahl gegeben, wir haben diese in einfacherer Form unten repliziert. Erklären Sie für die von Ihnen konstruierten Maschinen jeweils, wie diese funktionieren und was welcher Zustand tut. Erweitern Sie das Bandalphabet *nicht*.

a) Entwerfen Sie eine Turingmaschine, die eine binärkodierte natürliche Zahl dekrementiert. Die Maschine soll akzeptierend halten, wenn das Ergebnis eine natürliche Zahl ($\mathbb{N}_0$) ist, und nicht-akzeptierend auf leerem Band, wenn die Eingabezahl 0 ist. Die Ausgabe darf keine führenden Nullen aufweisen. Verwenden Sie maximal 6 Zustände, 5 reichen aus. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$.

b) Kombinieren Sie die gegebene Inkrementierungsmaschine mit Ihrer Dekrementierungsmaschine, sodass diese bei Eingabe $n_1 X n_2$, wobei X ein Trennsymbol ist und n_1 und n_2 binärkodierte natürliche Zahlen (mit Null, $\mathbb{N}_0$) sind. Addieren Sie n_2 auf n_1. Sie dürfen annehmen, dass mindestens eine der beiden Zahlen nicht Null ist. Am Ende soll das Band genau die Summe der beiden Zahlen, nicht aber ein Trennsymbol oder führende Nullen enthalten, und die Maschine in einem Endzustand halten. Wie können Sie mit Randfällen (beispielsweise wenn eine der beiden Zahlen 0 ist) umgehen? Verwenden Sie maximal 11 Zustände, 8 reichen aus. $\Sigma = \{0, 1, X\}$, $\Gamma = \{0, 1, X, \sqcup\}$.
Tipp: Sie können während der Berechnung beliebig weitere Trennsymbole einfügen, beispielsweise wenn die zweite Zahl durch Dekrementierungen kürzer wird.

c) Simulieren Sie Ihre Turingmaschine aus Aufgabenteil b) auf der Eingabe $011X10$.

Für jeden weiteren Zustand wird ein Punkt abgezogen.



Aufgabe 2 (*Abgeschlossenheit Entscheidbarer Sprachen,* $2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$ *Punkte*)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Eine textuelle Beschreibung der Turingmaschinen genügt.

a) Die Menge der entscheidbaren Sprachen ist unter dem Kleen'schen Abschluss abgeschlossen, d.h. für jede entscheidbare Sprache gilt, dass L^* auch entscheidbar ist (entscheidbar $\equiv$ turing-entscheidbar).

b) Die Menge der entscheidbaren Sprachen ist bzgl. der Operation $\min(\cdot)$ abgeschlossen, d.h. für jede entscheidbare Sprache L gilt $\min(L)$ ist entscheidbar.

$\min(L) := \{x \in L \mid \text{kein echtes Präfix von } x \text{ liegt in } L\}$

[Ein Präfix p von x heißt echt, wenn $p \neq x$ bzw. $|p| < |x|$]

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (kurze Begründung genügt).

c) Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.

d) Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.

e) Für jede unentscheibare Sprache L gibt es eine echte Obermenge, die ebenfalls unentscheidbar ist.

f) Aus L_1 entscheidbar und $L_1 \cap L_2$ entscheidbar folgt L_2 entscheidbar.

Aufgabe 3 *(2-Kopf-Turingmaschinen,* $4+1$ *Punkte)*

Eine 2-Kopf-Turingmaschine besitzt zwei Leseköpfe, die sich unabhängig voneinander bewegen können. Beide Köpfe starten auf dem linkesten Symbol der Eingabe. Die Köpfe agieren synchron, und die Turingmaschine sieht in jedem Schritt beide eingelesenen Zeichen. Das Verhalten von Kopf 1 kann vom Zeichen abhängen, welches Kopf 2 liest.
Die Turingmaschine hat die Form:

$M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S_{\in Q}, F_{\subseteq Q})$

Die Zustandsübergangsfunktion hat die folgende Form (wir betrachten nur deterministische 2-Kopf-Turingmaschinen):

$Q \times \Gamma \times \Gamma \;\to\; Q \times \Gamma \times \{R, L, N\} \times \Gamma \times \{R, L, N\}$

Für einen Übergang $(q, \gamma_1, \gamma_2) \to (q', \gamma_1', R, \gamma_2', L)$ sagen wir, wenn die 2-Kopf-Turingmaschine in Zustand q ist, mit Kopf 1 das Zeichen γ_1 liest, und mit Kopf 2 das Zeichen γ_2 liest, dann geht die Maschine über in Zustand q', schreibt mit Kopf 1 γ_1' und bewegt ihn nach rechts, und schreibt mit Kopf 2 γ_2' und geht nach links.

a) Zeigen Sie mithilfe einer Beweisskizze, dass 2-Kopf-Turingmaschinen genauso mächtig sind wie normale (1-Kopf-)Turingmaschinen.

b) Wie viel langsamer als eine 2-Kopf-Turingmaschine kann eine normale Turingmaschine schlimmstenfalls sein? Verwenden Sie Ihre Konstruktion aus Aufgabe a).

Ausgabe: Mittwoch, 2.12.2015
Abgabe: Freitag, 11.12.2015, 12:30 im Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34