Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

8. Übungsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Aufgabe 1 (*Charakteristische Funktion, Entscheidbarkeit,* $2+2+2+2$ *Punkte*)

Sei U eine Menge und $\chi_U : \Sigma^* \to \{0,1\}$ ihre charakteristische Funktion, d.h. $\chi_U(z) = 1 \Leftrightarrow z \in U$.

a) Seit $\mathcal{T}$ eine Turingmaschine, die die entscheidbare Menge L akzeptiert. Zeigen Sie, dass χ_L berechenbar ist.

b) Zeigen Sie, dass das Komplement einer entscheidbaren Menge entscheidbar ist.

c) Zeigen Sie, dass die entscheidbaren Mengen unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen sind.

d) Zeigen Sie, dass es für eine gegebene entscheidbare Menge L, unentscheidbar ist, ob eine Turingmaschine M (gegeben durch ihre Gödelnummer) die charakteristische Funktion χ_L berechnet (auch wenn die Menge berechenbar ist).

Aufgabe 2 (*Rekursiv aufzählbare Sprachen, Entscheidbarkeit,* $2+3$ *Punkte*)

Seien $L, L_1, \ldots, L_k$ rekursiv aufzählbare Teilmengen von Σ^* und $L_1, \ldots, L_k$ paarweise disjunkt. Zeigen Sie:

a) Ist L entscheidbar und $L = L_1 \cup L_2$, dann sind auch L_1 und L_2 entscheidbar.

b) Ist $L_1 \cup \ldots \cup L_n = \Sigma^*$, dann sind $L_1, \ldots, L_n$ entscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie woimmer möglich die Abgeschlossenheitseigenschaften von entscheidbaren und semi-entscheidbaren (rekursiv aufzählbaren) Mengen.

Aufgabe 3 (*Ganzzahlige Polynome,* $1+3$ *Punkte*)

$L_{poly} = \{P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$ ist die Sprache aller Polynome mit ganzzahligen Faktoren. Hieraus betrachten wir die Teilsprache, aller Polynome mit ganzzahligen Faktoren, und mindestens einer ganzzahligen Nullstelle $L_{\mathbb{N}ull} = \{P(X) \in L_{poly} \mid \exists x_0 \in \mathbb{Z},\quad P(x_0) = 0\}$.

a) Zeigen Sie, $L_{\mathbb{N}ull}$ ist rekursiv aufzählbar.

b) Zeigen Sie, $L_{\mathbb{N}ull}$ ist entscheidbar.

Aufgabe 4 (*Linien Treffen,* 3 *Punkte*)

Wir betrachten alle ganzzahlig linearen Funktionen der Form $f_{v,c}(t) = v \cdot t + c$ (wobei $v, c, t \in \mathbb{Z}$). Konstruieren Sie eine berechenbare Funktion, $\ell(t)$ sodass $\ell(t)$ jede Funktion $f(t)$ mindestens einmal “ganzzahlig” schneidet (Formalisiert: $\forall v, c \in \mathbb{Z} / \exists t_0 \in \mathbb{Z} \quad | \quad \ell(t_0) = v \cdot t_0 + c = f_{v,c}(t_0)$).

Ausgabe: Mittwoch, 9.12.2015
Abgabe: Freitag, 18.12.2015, 12:30 im Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34