Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

8. Übungsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Musterlösungen

Aufgabe 1 (*Charakteristische Funktion, Entscheidbarkeit,* $2+2+2+2$ *Punkte*)

Sei U eine Menge und $\chi_U : \Sigma^* \to \{0,1\}$ ihre charakteristische Funktion, d.h. $\chi_U(z) = 1 \Leftrightarrow z \in U$.

a) Seit $\mathcal{T}$ eine Turingmaschine, die die entscheidbare Menge L akzeptiert. Zeigen Sie, dass χ_L berechenbar ist.

b) Zeigen Sie, dass das Komplement einer entscheidbaren Menge entscheidbar ist.

c) Zeigen Sie, dass die entscheidbaren Mengen unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen sind.

d) Zeigen Sie, dass es für eine gegebene entscheidbare Menge L, unentscheidbar ist, ob eine Turingmaschine M (gegeben durch ihre Gödelnummer) die charakteristische Funktion χ_L berechnet (auch wenn die Menge berechenbar ist).

Musterlösung:

a) Ist L entscheidbar, dann gibt es eine Turingmaschine $\mathcal{M}$, die für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ stoppt. Zusätzlich ist der Zustand, in dem $\mathcal{M}$ stehenbleibt, ein Endzustand, wenn $w \in L$. Zu jedem Wort w gibt es einen Zustand q, sodass $\mathcal{M}$ in einer Konfiguration $x(q)y$ stoppt, wobei $y \notin \{\varepsilon, \sqcup\}$. Wir erweitern $\mathcal{M}$ wie folgt zu einer Turingmaschine $\mathcal{M}'$, die die charakteristische Funktion von L berechnet: Falls $\mathcal{M}$ in einem Endzustand halten würde, lösche das Band und schreibe eine einzige 1 darauf. Falls $\mathcal{M}$ in einem Zustand $q \notin F$ halten würde, lösche das Band und schreibe eine einzige 0.

b) Da die Menge U entscheidbar ist, gibt es eine charakteristische Funktion χ_U. Die charakteristische Funktion des Komplements $\overline{U}$, $\chi_{\overline{U}}$, hat die Eigenschaft $\chi_{\overline{U}}(x) = 0 \Leftrightarrow \chi_U(x) = 1$, also $\chi_{\overline{U}}(x) = 1 - \chi_U(x)$. Zum Nachweis der Berechenbarkeit von $\chi_{\overline{U}}$ geben wir ein Meta-while-Programm an:

Function decideComplement($z : \Sigma^*$)
  $x, y : \mathbb{N}$
  $y := \chi_U(z)$
  if $y = 0$ **then** $x := 1$ **else** $x := 0$
  return x

Um daraus ein "echtes" while-Programm zu machen, muss χ_U substituiert werden und die bedingte Anweisung durch eine Wiederholungsanweisung ersetzt werden. Dafür gibt es allgemeine Techniken.

c) Wir verwenden die charakteristischen Funktionen χ_U und χ_V der Mengen U und V. Ein Wort $z \in \Sigma^*$ gehört genau dann zu $U \cap V$ wenn $\chi_U(z) = \chi_V(z) = 1$. Meta-while-Programm:

Function decideIntersection($z : \Sigma^*$)
  $x, y : \mathbb{N}$
  $y := \chi_U(z)$
  if $y = 0$ **then** $x := 0$ **else** $x := \chi_V(z)$
  return x

Die Abgeschlossenheit unter der Vereinigung erhalten wir mithilfe der de Morganschen Gesetze der Mengenlehre: $\overline{U \cup V} = \overline{U} \cap \overline{V}$.

d) I. Variante (Reduktion vom Halteproblem): Sei $IN = (\langle M_{IN} \rangle, w_{IN})$ eine Instanz des Halteproblems, für jede solche Instanz lässt sich die Turingmaschine TM_{IN} konstruieren.

- Zuerst schreibt TM_{IN} eine Instanz IN des Halteproblems auf das Band
  $(\langle M_{IN} \rangle \# w_{IN})$
- Dann simuliert TM_{IN} die Turingmaschine M_{IN} auf w_{IN}
  (möglich, da universelle Turingmaschinen existieren)
- "Danachäkzeptiert TM_{IN} genau alle Worte in L (möglich, da L berechenbar ist)

Es ist klar, TM_{IN} akzeptiert L genau dann, wenn die Instanz IN hält. Falls sie nicht hält akzeptiert TM_{IN} die leere Sprache. Angenommen das Problem aus der Aufgabenstellung wäre entscheidbar, dann gäbe es eine Turingmaschine T_{ENT}, die es entscheidet. Da diese Turingmaschine für jede Turingmaschine TM_{IN} entscheiden könnte, ob TM_{IN} L akzeptiert könnte T_{ENT} das Halteproblem entscheiden, dieses ist aber per Definition unentscheidbar.

II. Variante (Rekursions-Theorem): Annahme, die beschriebene Sprache ist entscheidbar und T_{ENT} ist eine Turingmaschine, die sie entscheidet. Nun konstruieren wir die folgende Turingmaschine (T_{antiENT}), bei der T_{ENT} sich falsch entscheidet.

- Zuerst sichert T_{antiENT} die Eingabe auf einem extra Band/einer gesonderten Spur
- Nun schreibt T_{antiENT} ihre eigene Gödelnummer $\langle T_{\mathrm{antiENT}} \rangle$ auf das Band (möglich, durch das Rekursionstheorem)
- Dann schreibt T_{antiENT} die Gödelnummer $\langle T_{\mathrm{ENT}} \rangle$ auf das Band (T_{ENT} steht zu diesem Zeitpunkt fest)
- Nun simuliert T_{antiENT} die Maschine T_{ENT} auf der Eingabe $\langle T_{\mathrm{antiENT}} \rangle$
- Wenn T_{ENT} $\langle T_{\mathrm{antiENT}} \rangle$ akzeptiert, geht T_{antiENT} unabhängig, von der ursprünglichen Eingabe, in einen ablehnenden Zustand (die Entscheidung von T_{ENT} war falsch). Falls T_{ENT} nicht akzeptiert, so entscheidet T_{antiENT} die Sprache L (möglich, da L entscheidbar ist). Daraus folgt, T_{ENT} hat die Turingmaschine T_{antiENT} falsch klassifiziert, und kann daher nicht die gewünschte Sprache erkennen.

Aufgabe 2 (*Rekursiv aufzählbare Sprachen, Entscheidbarkeit,* $2 + 3$ *Punkte*)

Seien $L, L_1, \ldots, L_k$ rekursiv aufzählbare Teilmengen von Σ^* und $L_1, \ldots, L_k$ paarweise disjunkt. Zeigen Sie:

a) Ist L entscheidbar und $L = L_1 \cup L_2$, dann sind auch L_1 und L_2 entscheidbar.

b) Ist $L_1 \cup \ldots \cup L_n = \Sigma^*$, dann sind $L_1, \ldots, L_n$ entscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie woimmer möglich die Abgeschlossenheitseigenschaften von entscheidbaren und semi-entscheidbaren (rekursiv aufzählbaren) Mengen.

Musterlösung:

a) $\overline{L_1} = \overline{L} \cup L_2$. Da L entscheidbar ist, ist $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar, und da auch L_2 die ist, ist $\overline{L} \cup L_2$ rekursiv aufzählbar. (Die Vereinigung rekursiv aufzählbarer Mengen ist wieder rekursiv aufzählbar.) Also sind L_1 und sein Komplement rekursiv aufzählbar und damit entscheidbar. Die Entscheidbarkein von L_2 wird analog bewiesen.

b) Wir beweisen durch Induktion über k: *Ist S entscheidbar und $S = L_1 \cup \ldots \cup L_k$, dann sind die $L_1, \ldots, L_k$ entscheidbar.*
Induktionsanfang: Für $k = 2$ folgt die Aussage aus Teil a).
Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes k gelte die zu beweisende Aussage für beliebige entscheidbare Mengen.
Induktionsschritt ($k \rightsquigarrow k+1$)**:** Betrachte $(L_1 \cup \ldots \cup L_k) \cup L_{k+1}$. Die Mengen $L_1 \cup \ldots \cup L_k$ und L_{k+1} erfüllen die Voraussetzung von Aufgabenteil a) und sind damit entscheidbar. Da insbesondere auch $L_1 \cup \ldots \cup L_k$ entscheidbar ist, sind nach Induktionsvoraussetzung $L_1, \ldots, L_{k+1}$ entscheidbar.

$S = \Sigma^*$ ist entscheidbar. Damit folgt die zu beweisende Aussage.

Aufgabe 3 (*Ganzzahlige Polynome,* $1+3$ *Punkte*)

$L_{poly} = \{P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$ ist die Sprache aller Polynome mit ganzzahligen Faktoren. Hieraus betrachten wir die Teilsprache, aller Polynome mit ganzzahligen Faktoren, und mindestens einer ganzzahligen Nullstelle $L_{\mathbb{N}ull} = \{P(X) \in L_{poly} \mid \exists x_0 \in \mathbb{Z},\quad P(x_0) = 0\}$.

a) Zeigen Sie, $L_{\mathbb{N}ull}$ ist rekursiv aufzählbar.

b) Zeigen Sie, $L_{\mathbb{N}ull}$ ist entscheidbar.

Musterlösung:

a) Die Sprache ist semi-entscheidbar ($\Leftrightarrow$ rekursiv aufzählbar). Ansatz: teste ganz $\mathbb{Z}$ auf Nullstellen. Wir konstruieren die folgende Turingmaschine M_{try}, die die Sprache akzeptiert. M_{try} berechnet $P(X)$ für die Eingabewerte $X = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2...$ ($P(X)$ ist berechenbar für alle $X \in \mathbb{Z}$). Sobald M_{try} ein X findet, so dass $P(X) = 0$ hält die Turingmaschine in einem akzeptierenden Zustand. Diese Konstruktion hält genau dann, wenn das Polynom eine ganzzahlige Nullstelle hat.

b) Um M_{try} so anzupassen, dass es immer hält genügt es eine Einschränkung an die Nullstellen x_0 von $P(X)$ auszunutzen.

$$\begin{aligned} P(X) &= a_n X^n + ... + a_1 X + a_0 \\ 0 &= a_n x_0^n + ... + a_1 x_0 + a_0 \\ a_0 &= a_n x_0^n + ... + a_1 x_0 \\ \frac{a_0}{x_0} &= a_n x_0^{n-1} + ... + a_1 \end{aligned}$$

Da $a_n x_0^{n-1} + ... + a_1$ ist ganzzahlig (x_0 und a_i sind ganzzahlig) muss auch $\frac{a_0}{x_0}$ ganzzahlig sein. Daraus folgt, wenn x_0 eine ganzzahlige Nullstelle von $P(X)$ ist, so teilt $|x_0|$ $|a_0|$ und außerdem $|x_0| \leq |a_0|$.

Wenn man M_{try} so anpasst, dass es nur $X = 0, 1, -1, ..., |a_0|, -|a_0|$ testet, erhält man eine Turingmaschine, die L_{Null} entscheidet.

Aufgabe 4 (*Linien Treffen, 3 Punkte*)

Wir betrachten alle ganzzahlig linearen Funktionen der Form $f_{v,c}(t) = v \cdot t + c$ (wobei $v, c, t \in \mathbb{Z}$). Konstruieren Sie eine berechenbare Funktion, $\ell(t)$ sodass $\ell(t)$ jede Funktion $f(t)$ mindestens einmal "ganzzahlig" schneidet (Formalisiert: $\forall v, c \in \mathbb{Z}/\exists t_0 \in \mathbb{Z} \quad | \quad \ell(t_0) = v \cdot t_0 + c = f_{v,c}(t_0)$).

Musterlösung:
Korrekturhinweis: ähnliche/ gute Ideen, die nicht zur richtigen Lösung führen ergeben Teilpunkte.
Lösungsansatz: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist aufzählbar! Mit Hilfe einer totalen Ordnung $f_0, f_1, ...$ aller Funktionen (die Ordnung folgt aus der Abzählbarkeit) lässt sich $\ell(t)$ so konstruieren dass es an jedem $t \in \mathbb{N}$ die Funktion f_t schneidet.
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kann abgezählt werden, indem man es als Gitter auffasst, und dieses Gitter in Spiralen abläuft (ähnlich der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$). Dadurch erreichen wir eine bijektive Abbildung $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Betrachten wir die Funktion
$$\ell(t) = \begin{cases} f_{r(t)}(t) & \text{falls } t \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Um zu zeigen, dass $\ell(t)$ die gewünschten Eigenschaften besitzt betrachten wir die Funktion f_{v_0,c_0} mit allgemeinen aber festen Parametern $v_0, c_0 \in \mathbb{Z}$. Nach der obigen Konstruktion, existiert ein $t_0 \in \mathbb{N}$, sodass $r(t_0) = (v_0, c_0)$. An der Stelle $t = t_0$ gilt $\ell(t_0) = f_{r(t_0)}(t_0) = f_{v_0,c_0}(t_0) = v_0 \cdot t_0 + c_0$, und somit gibt es für jede Funktion f_{v_0,c_0} den geforderten ganzzahligen Schnittpunkt t_0.