Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

Weihnachtsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Aufgabe 1 (*Reguläre Sprachen,* $2+2+3+3$ *Punkte*)

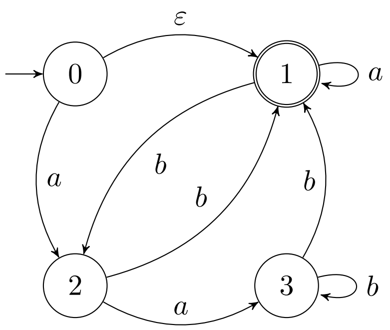
Konstruieren Sie einen deterministischen Automaten, einen regulären Ausdruck, und eine rechtsreguläre Grammatik für jede der folgenden regulären Sprachen.

a) $L_a = \{w \in \{a,b\}^* \mid \exists_{X \in \{a,b\}} \; w \text{ endet auf } aXa\}$

b) $L_b = \{w \in \{a,b\}^* \mid n_b \mod 3 = 1 \;\vee\; n_a \mod 2 = 1\}$

Wenden Sie die Potenzmengenkonstruktion an, um aus dem folgenden NEA den zugehörigen DEA zu konstruieren. Verwenden Sie dann den aus der Vorlesung bekannten Algorithmus zur Automatenminimierung, um die entstandenen Automaten zu minimieren. Füllen sie dabei die untenstehenden Tabellen aus und zeichnen sie die entstandenen Automaten.

c)



Zustände	a	b
$A =$		
$B =$		
$C =$		
$D =$		
$E =$		
$F =$		
$G =$		
$H =$		

Zustände	A	B	C	D	E	F	G	H
A	$=$							
B		$=$						
C			$=$					
D				$=$				
E					$=$			
F						$=$		
G							$=$	
H								$=$

d) Zeigen sie mit Hilfe des Pumpinglemmas, dass die Sprache $L = \{a^n b^n c^m \mid n,m \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^m c^m \mid n,m \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 2 (*Kontextfreie Sprachen,* $2+4+2$ *Punkte*)

a) Bringen Sie die folgende kontextfreie Grammatik in Chomskynormalform.

$$
\begin{aligned}
G_a &= (\{a,b\},\{S,C,D,E\},P_a,S)\\
P_a &= \{S \to C \mid DE \mid abD,\\
&\qquad C \to aCb \mid ba,\\
&\qquad D \to aD \mid bDa \mid \varepsilon,\\
&\qquad E \to S \mid abE\}
\end{aligned}
$$

b) Gegeben sei die Grammatik $G_b = (\{a,b,c\},\{A,B,C,S\},P_b,S)$ mit

$$
\begin{aligned}
P_b = \{&S \to AB \mid CS \mid BS \mid AA,\\
&A \to a \mid SS \mid BB \mid BC,\\
&B \to b \mid CC \mid BS,\\
&C \to c\}
\end{aligned}
$$

Prüfen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus (von Cocke, Younger, Kazami) ob die Wörter *abcabb* und *acbabcb* in der von G_b erzeugten Sprache liegen. Füllen Sie hierzu die folgenden Tabellen aus.

a	b	c	a	b	b

a	c	b	a	b	c	b

c) Konstruieren Sie einen Kellerautomaten, der die Sprache $L = \{a^n b^n c^m \mid m,n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^m c^m \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ erkennt. Ist der von Ihnen konstruierte Automat deterministisch? Kann es einen deterministischen Kellerautomat geben, der diese Sprache erkennt? Begründen Sie kurz (kein Beweis).

d) Verwenden Sie das Pumpinglemma für kontextfreie Sprachen um zu zeigen, dass die Sprache $L = \{a^n w a^n w^R \mid w \in \{b,c\}^*, n \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 3 (*Chomsky 1/0* , $3+3$ *Punkte*)

a) Warum ist $L_1 = \{n\#w \mid n_a(w) = n^2,$ mit n binär kodiert$\}$ vom Chomsky-Typ 1? Beweisen Sie, dass L_1 nicht kontextfrei ist und begründen Sie, warum es kontextsensitiv ist.

b) Zeigen Sie: Die Sprache aller Turingmaschinen, die Weihnachtsbäumchen malen und dann halten, ist vom Chomsky-Typ 0 und *nicht* vom Chomsky-Typ 1.

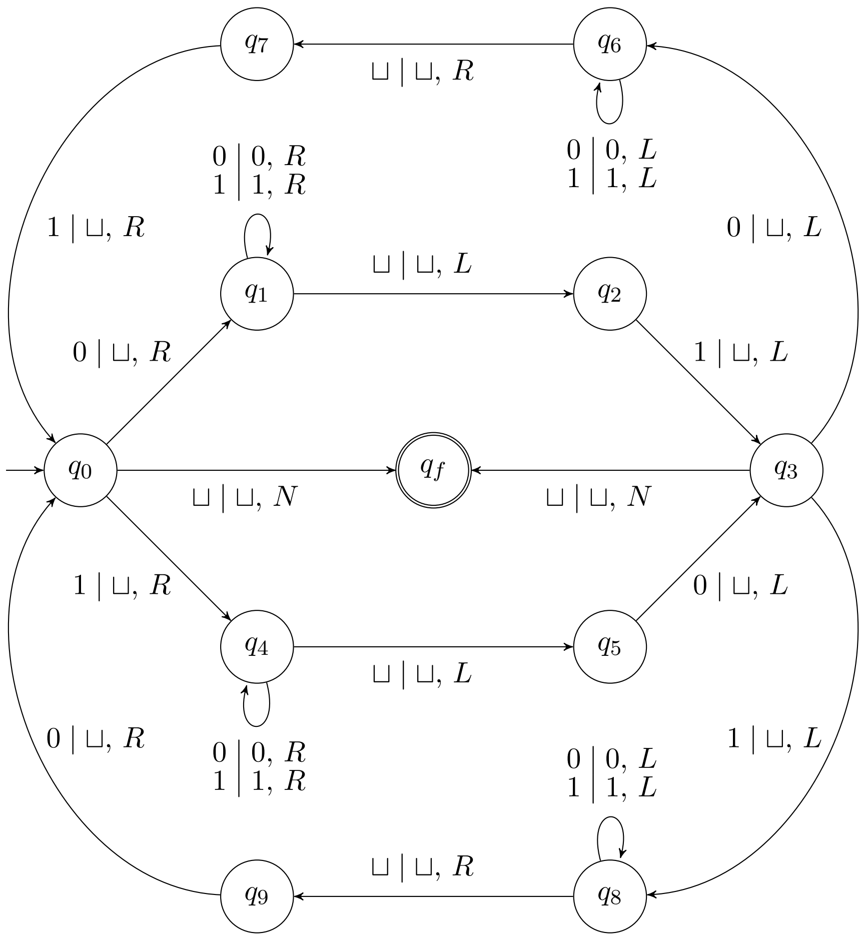
Aufgabe 4 (*Turingmaschinen,* $4+(1+2+1)$ *Punkte*)

a) Konstruieren Sie eine linear beschränkte Turingmaschine $\mathcal{M} = (\mathcal{Q},\Sigma,\Sigma \cup \{\sqcup\},\delta,q_0,\mathcal{F})$ mit Eingabealphabet $\Sigma = \{0,1,a,b,\#\}$, Startzustand $q_0 \in \mathcal{Q}$ und $|\mathcal{Q}| \leq 8$, welche die Sprache $L = \{n\#w \mid w \in \{a,b\}^* \wedge n_a(w) = n,$ mit n binär kodiert$\}$ erkennt (Beachten Sie, dass sich die Sprache von der aus Aufgabe 3 unterscheidet: n wird nicht quadriert). Dabei darf die Binärzahl wie auf Blatt 7 führende Nullen enthalten. Ihre Maschine darf die Eingabe völlig zerfleddern.

Beschreiben Sie die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine und umreißen Sie die Aufgaben der Zustände. Sie dürfen ausnahmsweise annehmen, dass die Eingabe $n\#w$ die Bedingung $w \in \{a, b\}^*$ erfüllt.

Hinweis: Können Sie Ihre Subtraktionsmaschine vom 7. Übungsblatt teilweise wiederverwenden? Schaffen Sie es, mit 7 Zuständen auszukommen?

b) Gegeben sei die Turingmaschine $\mathcal{M} = (\{q_0, \dots, q_9, q_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \delta, q_0, \{q_f\})$, deren Zustandsübergangsfunktion δ durch den untenstehenden Graphen gegeben ist.



1.) Simulieren Sie die Berechnung dieser Turingmaschine auf der Eingabe $w = 01101001$. Geben Sie *alle* durchlaufenen Konfigurationen an.

2.) Welche Sprache erkennt diese Turingmaschine?

3.) Geben Sie eine Grammatik maximalen Chomsky-Typs an, welche diese Sprache erzeugt. Welchen (höchsten) Chomsky-Typ hat Ihre Grammatik?

Aufgabe 5 (*Entscheidbarkeit,* $(1 + 2 + 2 + 1 + 1) + 1 + 2 + (2 + 2)$ *Punkte*)

a) Sind die folgenden Mengen entscheidbar, semientscheidbar oder unentscheidbar? Beweisen Sie!

1.) $L_1 = \{1 \mid \text{Der Weihnachtsmann existiert}\}$

2.) $L_2 = \{\langle M \rangle \mid \text{Für alle Worte } w \in \Sigma^* : M \text{ akzeptiert } w \Leftrightarrow M \text{ akzeptiert } w^R\}$

3.) $L_3 = \{\langle M \rangle \mid M(x) = x^2\}$

4.) $L_4 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist eine Turingmaschine und } L(M) \text{ ist semi-entscheidbar}\}$

5.) $L_5 = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ ist eine Turingmaschine und } M \text{ hält auf der Eingabe } w\}$

b) Zeigen Sie, dass das Komplement $\mathcal{H}^c$ des Halteproblems nicht semientscheidbar ist.

c) Zeigen Sie, dass das Komplement L_d^c der Diagonalsprache semientscheidbar ist.

d) Analog zu Turingmaschinen lassen sich auch andere Maschinenmodelle gödelisieren, beispielsweise deterministische endliche Automaten. Wir nehmen wieder an, dass ungültige Automatengödelnummern den Automaten beschreiben, der die leere Sprache akzeptiert. Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind.

   1.) $\text{INFINITE}_{\text{DFA}} = \{\langle\mathcal{M}\rangle \mid \mathcal{M}$ ist ein endlicher Automat und $L(\mathcal{M})$ ist unendlich$\}$
   2.) $\text{ALL}_{\text{DFA}} = \{\langle\mathcal{M}\rangle \mid \mathcal{M}$ ist ein endlicher Automat und $L(\mathcal{M}) = \Sigma^*\}$

Aufgabe 6 (*Nicht-Entscheidbarkeit,* $3+1+1+1+1+1+1+1$ *Punkte*)

a) Beweisen Sie: Die Sprache $L = \{\langle M\rangle \mid M$ der Kopf von M besucht immer jedes Symbol der Eingabe$\}$ ist nicht entscheidbar.

Geben Sie für jedes der folgenden Post'schen Korrespondenzprobleme entweder eine Lösung an oder einen Beweis, dass keine Lösung existiert.

b) $t_1 = (b, ab), t_2 = (ba, abb), t_3 = (ab, abb)$

c) $t_1 = (ca, bac), t_2 = (b, ab), t_3 = (aba, a)$

d) $t_1 = (bab, bb), t_2 = (ba, abb), t_3 = (ab, ba)$

e) $t_1 = (aaaaa, a), t_2 = (aa, aaaaa)$

f) $t_1 = (abc, ab), t_2 = (abba, aabb), t_3 = (c, ccc), t_4 = (bbba, cbbb), t_5 = (abcc, aab)$

g) $t_1 = (ba, bab), t_2 = (abb, bb), t_3 = (bab, abb)$

h) $t_1 = (b, ca), t_2 = (a, ab), t_3 = (ca, a), t_4 = (abc, c)$

Aufgabe 7 (*Wahr-Falsch-Block,* 10 *Punkte*)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie kurz.

Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
$\{p \mid p \text{ ist prim}\}$ ist entscheidbar			
$\emptyset$ und $\mathbb{N}_0$ sind die einzigen entscheidbaren Teilmengen von $\mathbb{N}_0$			
Die Vereinigung kontextfreier Sprachen ist kontextfrei			
Zu jeder endlichen Sprache L gibt es eine Chomsky-3-Grammatik G mit $L(G) = \overline{L}$ (Komplementsprache)			
Wenn $uv \to ux$ dann $v \to x$			
Wenn $v \to x$ dann $uv \to ux$			
Es gibt `loop`-Programme, die nicht terminieren			
Wenn eine Menge entscheidbar ist, dann ist ihr Komplement rekursiv aufzählbar			
Jede Teilmenge einer entscheidbaren Menge ist entscheidbar			
Das Wortproblem für kontextsensitive Sprachen ist entscheidbar			

Ausgabe: Mittwoch, 16.12.2015
Abgabe: keine Abgabe, keine Korrektur