Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

11. Übungsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Aufgabe 1 (*Reduktionen,* $2 + 4 + 4$ *Punkte*)

INDEPENDENT SET: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$, gibt es ein Independent Set der Größe k, also eine Menge $I \subseteq V$ mit $|I| \geq k$, sodass $(I \times I) \cap E = \emptyset$, d.h. für keine Kante des Graphen beide Endpunkte in I liegen?

CLIQUE: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$, gibt es eine Clique der Größe k, d.h. eine Menge $C \subseteq V$ mit $|C| \geq k$, sodass $C \times C \subseteq E$, d.h. jeder Knoten der Clique mit jedem anderen verbunden ist?

VERTEX COVER: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$, gibt es ein Vertex Cover der Größe k, d.h. eine Menge $C \subseteq V$ mit $|C| \leq k$, sodass für jede Kante mindestens einer der Endpunkte in C liegt?

EXACT COVER: Gegeben eine Grundmenge M und ein Teilmengensystem $T \subseteq \mathcal{P}(M)$, existiert eine *disjunkte* Überdeckung von M mit Hilfe von Teilmengen in T, d.h. $\exists_{U \subseteq T} : \dot{\bigcup}_{u \in U} = M$?

SUBSET SUM: Gegeben eine Zahl $W \in \mathbb{N}$ und eine Menge $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von Gegenständen, habe Gegenstand v_i das Gewicht $c(v_i) \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Teilmenge $U \subseteq M$ sodass $\sum_{v \in U} c(v) = W$?

Zeigen Sie unter Verwendung, dass INDEPENDENT SET und EXACT COVER NP-vollständig sind:

a) CLIQUE ist NP-vollständig ($\geq_p$ INDEPENDENT SET)

b) VERTEX COVER ist NP-vollständig ($\geq_p$ INDEPENDENT SET)

c) SUBSET SUM ist NP-vollständig ($\geq_p$ EXACT COVER)

Aufgabe 2 (*SAT-Formulierungen,* $3 + 4$ *Punkte*)

Geben Sie für die folgenden Probleme an, wie deren Instanzen als Instanzen des Erfüllbarkeitsproblems SAT ausgedrückt werden können. Geben Sie dazu eine Vorschrift an, wie die Eingabeinstanz in eine Menge von Klauseln überführt werden kann und wie diese Klauseln miteinander verknüpft werden (Konjunktion oder Disjunktion, Schachtelungen sind erlaubt). Beschreiben Sie die Bedeutung der Variablen und Klauseln. Die Anzahl der Variablen und Klauseln muss polynomiell in den Parametern der Eingabeinstanz sein. *Terminologie:* Eine Klausel ist eine Konjunktion oder Disjunktion von Literalen; ein Literal ist eine Variable (z.B. a) oder deren Negation ($\neg a$).

a) 3COLOUR: Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, lassen sich die Knoten des Graphen so einfärben, dass keine zwei benachbarten Knoten die selbe Farbe haben? Formell:
$\exists_{c\colon V \to \{R,G,B\}} \colon c(u) = c(v) \to (u, v) \notin E$

b) EXACT COVER, Definition siehe Aufgabe 1

Aufgabe 3 (*3COLOUR,* 3 *Punkte*)

Konstruieren Sie mit dem aus der Übung bekannten Verfahren eine 3COLOUR-Instanz, die äquivalent ist zu der folgenden 3SAT-Instanz. Färben Sie außerdem den entstandenen Graphen in drei Farben und lesen sie eine korrekte Belegung ab.

$(a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$

Ausgabe: Mittwoch, 13.1.2016
Abgabe: Freitag, 22.1.2016, 12:30 im Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34