Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

12. Übungsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Aufgabe 1 (*FREE EDGE, 2 Punkte*)

Wir definieren das Entscheidungsproblem FREE EDGE: Gegeben sei ein (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ und $k \leq |V| \in \mathbb{N}$. Gibt es für jedes $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$ eine Kante $\{u, v\} \in E$, sodass weder u noch v in V' enthalten sind?
Formulieren Sie das komplementäre Problem co-FREE EDGE und zeigen Sie, dass FREE EDGE $\in$ co-NP.

Aufgabe 2 (*NP-vollständige Wegeprobleme in Graphen, 2 + 3 Punkte*)

Gegeben seien folgenden Probleme:

HAMILTON PATH (NP-vollständig): Gegeben einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$, gibt es einen einfachen (zykelfreien) Pfad der jeden Knoten des Graphen durchläuft (beachte: ein einfacher Pfad muss kein einfacher Zykel sein $\Rightarrow$ HAMILTON PATH $\neq$ HAMILTON CYCLE)?

LONGEST PATH: Gegeben einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c\colon\ E \to \mathbb{N}$ und einer Zahl $k \in \mathbb{N}$, gibt es einen einfachen Pfad mit Länge $\geq\ k$ in G?

DEGREE-CONSTRAINED SPANNING TREE: Gegeben einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ und einer Zahl $k \in \mathbb{N}$, existiert ein Spannbaum T_k in G dessen Knoten einen Grad von maximal k aufweisen?

Zeigen sie (Gehen Sie davon aus, dass HAMILTON PATH NP-vollständig ist):

a) das Problem LONGEST PATH ist NP-vollständig.

b) das Problem DEGREE-CONSTRAINED SPANNING TREE ist NP-vollständig.

Aufgabe 3 (*Eindeutige Gewichte, 5 Punkte*)

Gegeben seien die Probleme BIN PACKING und UNIQUE PACKING.

BIN PACKING (NP-vollständig): eine Instanz von BIN PACKING sei gegeben durch eine Menge $M = \{v_1, \ldots, v_n)$ von Elementen, eine Gewichtsfunktion $c\colon\ M \to \mathbb{N}$, eine Kapazität $W \in \mathbb{N}$ und einer Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Verteilung ($d\colon\ V \to \{1, \ldots, k\}$) aller Elemente auf maximal k Behälter sodass keine Teilmenge ein Gewicht größer W besitzt?

UNIQUE PACKING: Die Definition von UNIQUE PACKING entspricht der von BIN PACKING mit dem Unterschied, dass die Gewichtsfunktion injektiv sein muss, d.h. keine zwei Elemente können das selbe Gewicht haben.

Zeigen Sie, dass UNIQUE PACKING NP-vollständig ist (unter der Annahme, dass BIN PACKING NP-vollständig ist).

Aufgabe 4 (*Pseudopolynomialzeitalgorithmus für PARTITION, 5 Punkte*)

Geben Sie einen Pseudopolynomialzeitalgorithmus für PARTITION an (Tipp: dynamische Programmierung). Geben Sie eine obere Schranke für die Laufzeit an (diese muss polynomiell in der Anzahl der Zahlen in der Eingabe und der größten vorkommenden Zahl sein).

Hinweis: Sie müssen dabei nicht auf Turingmaschinenebene argumentieren, sondern können sich am RAM-Modell orientieren. Das bedeutet, dass Sie beispielsweise annehmen dürfen, dass Addition und Vergleich zweier Zahlen in Zeit $\mathcal{O}(1)$ möglich sind.

Aufgabe 5 (*Approximierbarkeit von MAX2SAT, 3 Punkte*)

Wir definieren das Optimalwertproblem MAX2SAT: Gegeben sei eine Menge von n 2SAT-Klauseln. Wie viele dieser Klauseln sind maximal gleichzeitig erfüllbar?

Sie dürfen annehmen, dass das Entscheidungsproblem zu MAX2SAT (*sind mehr als k Klauseln gleichzeitig erfüllbar?*) NP-vollständig ist. Nehmen Sie außerdem an, dass $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

Zeigen Sie, dass dann es keinen Polynomialzeitalgorithmus gibt, der MAX2SAT mit einem konstanten Maximalfehler e löst. Ein solcher Algorithmus darf bei k erfüllbaren Klauseln eine Antwort im Bereich $k - e$ bis $k + e$ geben.

Ausgabe: Mittwoch, 20.1.2016
Abgabe: Freitag, 29.1.2016, 12:30 im Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34