Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

13. Übungsblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Aufgabe 1 (*ILP*, $2 + 2 + 3$ *Punkte*)

Gegeben seien die folgenden Probleme:

ILP: Gegeben einer Menge von ganzzahligen Variablen (manchmal Unbekannte genannt) $x_1, \ldots, x_n$, und einer Menge von Constraints $c_1, \ldots, c_m$ (der Form $c_i : t_{i1}x_1 + \cdots + t_{in}x_n \leq t_i$, alternativ $=$ oder $\geq$, $t_x \in \mathbb{Z}$), existiert eine ganzzahlige Belegung für $x_1, \ldots, x_n$ so dass alle Constraints erfüllt sind (Constraints lassen sich häufig verkürzt schreiben, wenn nicht alle Variablen verwendet werden)?

3SAT: Gegeben einer Menge von aussagenlogischen Variablen $(x_1, \ldots, x_n)$, und einer Menge von Klauseln $k_1, \ldots, k_m$ mit je drei Literalen, gibt es eine Belegung der Variablen die alle Klauseln erfüllt?

VERTEX COVER: Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, existiert eine Teilmenge $S \subseteq V$ mit $|S| \leq k$ sodass alle Kanten des Graphen inzident zu mindestens einem Knoten aus S sind $(\forall_{e=\{u,v\}\in E}\ u \in S \vee v \in S)$?

MAX CUT: Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, existiert eine Teilmenge $S \subseteq V$ sodass mindestens k Kanten im Mengenprodukt von S und $V \setminus S$ liegen?
Formell: $|\{\{u, v\} \in E \mid u \in S \wedge v \notin S\}| \geq k$?

Formulieren Sie für jedes der folgenden Probleme eine Umformung, die für eine gegebene Probleminstanz eine erfüllbarkeitsäquivalente ILP-Instanz erzeugt. Die Laufzeit Ihrer Konstruktion darf nur polynomiell von der Größe der Ursprungsinstanz abhängen.

a) 3SAT

b) VERTEX COVER

c) MAX CUT

Aufgabe 2 (*Entropie*, $2 + 2 + 2$ *Punkte*)

Berechnen Sie die Entropie, einen Shannon-Fano-Code und einen Huffman-Code für folgende Beispiele. Geben Sie die gewichtete durchschnittliche Codelänge Ihrer Codes an.

a)

a_i	P_i
A	0.4
B	0.3
C	0.2
D	0.1

b)

a_i	P_i
A	0.3
B	0.25
C	0.25
D	0.15
E	0.05

c)

a_i	P_i
A	0.36
B	0.18
C	0.18
D	0.12
E	0.09
F	0.07

Aufgabe 3 (*Shannon-Fano vs. Huffman*, 4 *Punkte*)

Geben Sie ein Alphabet und zugehörige Zeichenwahrscheinlichkeiten an, sodass die durchschnittliche gewichtete Codelänge des Shannon-Fano-Codes größer ist als die eines Huffmancodes.

Aufgabe 4 (*Codelänge von Huffman-Codes, 3 Punkte*)

In der Literatur findet man teilweise folgende Behauptung:

> Man kann zeigen, dass die Länge der Huffmankodierung eines Zeichens mit Wahrscheinlichkeit P_i stets höchstens $\lceil -\log_2 P_i \rceil$ ist

Obwohl diese Behauptung in vielen Fällen stimmt, ist sie im Allgemeinen falsch. Geben Sie ein Beispiel an, das die Behauptung widerlegt.

Ausgabe: Mittwoch, 27.1.2016
Abgabe: Freitag, 5.2.2016, 12:30 im Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34