Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. P. Sanders, Dr. S. Gog
L. Hübschle-Schneider, T. Maier

3. Zusatzblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php
{sanders,gog,huebschle,t.maier}@kit.edu

Keine Abgabe, keine Korrektur!

Weitere Zusatzblätter: Weihnachtsblatt und Blatt 14

Aufgabe 1 (*NP-Vollständigkeitsreduktionen*)

Gegeben seien die folgenden Probleme:
ACYCLIC PARTITION: Gegeben ein *gerichteter* Graph $G = (V, E)$ und Zahlen $B, K, m \in \mathbb{N}$. Ist es möglich, V so in m disjunkte Teilmengen $V_1, \ldots, V_m$ zu zerlegen, sodass gilt:

- Die Größe jeder Partition ist höchstens B: $\forall_{i=1}^{m} |V_i| \leq B$
- Die Anzahl der Schnittkanten, d.h. solche die Partitionsgrenzen kreuzen, ist höchstens K: $|\{e = (u, v) \in E \mid\ u \in V_i,\ v \in V_j,\ i \neq j\} \leq K$
- Der "Partitionsgraph" G', der für jede der m Partitionen von V einen Knoten hat und eine gerichtete Kante zwischen zwei Knoten wenn es eine gerichtete Kante zwischen Knoten der entsprechenden Partitionen in G gibt, ist zyklenfrei?

EXACT 3COVER (X3C): Gegeben eine Menge X mit $|X| = 3q$ für $q \in \mathbb{N}$ und ein System X dreielementiger Teilmengen von X, d.h. $C \subseteq \mathcal{P}(Q)$ sodass $\forall c \in C : |c| = 3$. Gibt es eine Teilmenge $C' \subseteq C$ sodass jedes Element von X in genau einer Menge aus C' vorkommt, d.h. $\dot{\bigcup}_{c \in C'} c = X$?

Gegeben sei außerdem, dass EXACT 3COVER NP-vollständig ist (vergleiche: EXACT 3COVER zu EXACT COVER ist eine ähnliche Einschränkung wie 3SAT zu SAT; ohne Beweis). Zeigen Sie, dass ACYCLIC PARTITION ebenfalls NP-vollständig ist.
Hinweis: Überlegen Sie, wofür Sie Knoten einsetzen und in welche Richtung die Kanten zeigen müssen. Wie müssen Sie K und B wählen?

Aufgabe 2 (*NP-Vollständigkeit*)

Zeigen Sie: Wenn P=NP, dann sind genau alle nichttrivialen Sprachen aus P NP-vollständig. Nichttrivial bedeutet hier, dass die Sprache weder leer ist ($\emptyset$) noch alle Wörter enthält (Σ^*).

Aufgabe 3 (*Wissensfragen*)

Gelten die folgenden Aussagen? Begründen Sie kurz!

a) Wenn NP=PSPACE, dann muss P≠NP gelten

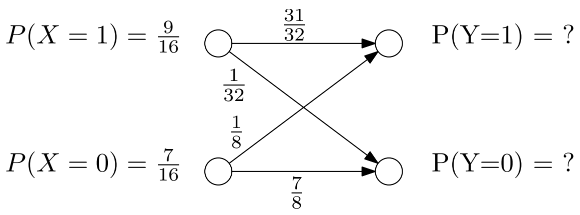
b) Wenn ein Optimalwertproblem von einer nichtdeterministischen Turingmaschine in polynomieller Zeit gelöst werden kann, ist das zugehörige Entscheidungsproblem in NP

c) Nichtdeterministische Turingmaschinen können kontextsensitive Sprachen in Polynomialzeit entscheiden.

Aufgabe 4 (*Informationstheorie (Alphabetcodierung + Verrauschter Kanal)*)

Gegeben sei das folgende Alphabet mit Buchstabenwahrscheinlichkeiten, und der binäre Kanal:

A	B	C	D	E	F
0.3	0.15	0.1	0.2	0.15	0.1



a) Um die Buchstaben über den binären Kanal zu versenden, müssen diese zunächst binär codiert werden. Berechnen Sie hierzu einen entsprechenden Huffman-Baum/Code.

b) Berechnen Sie nun die Entropie der Quelle ($H(X)$) und der Senke ($H(Y)$). Berechnen Sie außerdem den übertragenen Informationsgehalt ($I(X;Y)$). Hierzu benötigen Sie die bedingten Entropien $H(X|Y)$ und $H(Y|X)$, als auch die kombinierten Wahrscheinlichkeiten $P(X = x, Y = y)$.

c) Wie lässt sich der in (a) berechnete Huffman-Code variieren, sodass auf dem gegebenen Kanal die Fehlerwahrscheinlichkeit eines gesendeten F minimal wird? (Der resultierende Code soll weiterhin ein Huffman-Code für die gegebenen Buchstabenwahrscheinlichkeiten sein)

d) Was ist die Fehlerwahrscheinlichkeit eines gesendeten C in dem variierten Huffman-Code?