

1. Zusatzblatt zu Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 2015/16

<http://algo2.iti.kit.edu/TGI2015.php>
{sanders,huebschle,t.maier}@kit.edu

Diese Aufgabe wurde in der Übung am 22.10.2015 vorgerechnet.

Aufgabe 1 (Induktion über Ableitungsschritte)

$G_1 = (\{S, A, B\}, \Sigma_1 = \{a, b\}, P_1, S)$

$$P_1 = \{S \rightarrow aB \mid bA \mid SS \\ A \rightarrow aS \mid a \\ B \rightarrow bS \mid b\}$$

Zeigen sie induktiv, dass alle Wörter der Sprache $L(G_1)$ gleich viele as und bs enthalten.

Musterlösung:

z.z.: Wenn ein Wort $w \in \Sigma_1^*$ aus S ableitbar ist ($S \Rightarrow_{G_1}^* w$), dann enthält es gleich viele as wie bs .

IA: Betrachte alle Wörter, die sich in zwei oder weniger Schritten aus S ableiten lassen: ab, ba für beide gilt, sie besitzen gleich viele as wie bs .

IV: Für beliebiges aber festes $n > 1$ gilt, dass alle $w \in \Sigma_1^*$ die in maximal n Schritten aus S ableitbar sind ($S \Rightarrow^k w \mid k \leq n$) gleich viele as und bs enthalten.

IS: $S \Rightarrow^{n+1} w$. Betrachte den ersten Ableitungsschritt:

- 1. Fall: $S \Rightarrow aB \Rightarrow abS \Rightarrow^{n-1} abw'$ für $n > 1$ kann B nur zu bS abgeleitet werden (b terminiert und wurde im IA betrachtet). Aus der IV folgt $n_a(w') = n_b(w')$ da $w' \leq n$ Ableitungsschritte benötigt daraus ergibt sich $n_a(w) = n_a(w') + 1 = n_b(w') + 1 = n_b(w)$.
- 2. Fall: $S \Rightarrow bA \Rightarrow baS \Rightarrow^{n-1} baw'$ analog zu Fall 1 gilt: für $n > 1$ kann A nur zu aS abgeleitet werden (a terminiert und wurde im IA betrachtet). Aus der IV folgt $n_a(w') = n_b(w')$ da $w' \leq n$ Ableitungsschritte benötigt daraus ergibt sich $n_a(w) = n_a(w') + 1 = n_b(w') + 1 = n_b(w)$.
- 3. Fall: $S \Rightarrow SS \Rightarrow^n w$ aus der Konstruktion folgt, w lässt sich aufspalten in $w = w_1w_2$ mit $S \Rightarrow^{\leq n} w_1$ bzw. $S \Rightarrow^{\leq n} w_2$. Es folgt aus der IV $n_a(w) = n_a(w_1) + n_a(w_2) = n_b(w_1) + n_b(w_2) = n_b(w)$

Ausgabe: 28.10.2015

Abgabe: keine Abgabe, keine Korrektur