1.2 Reguläre Sprachen (Typ 3)

$\rightsquigarrow$ (nicht)deterministische endliche Automaten

$\rightsquigarrow$ reguläre Ausdrücke

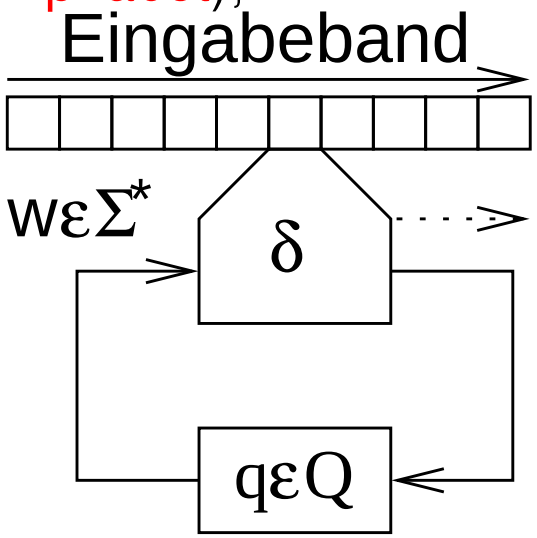
- Nichtreguläre Sprachen
- Abschlusseigenschaften

1.2.1 (Deterministische) endliche Automaten

Ein deterministischer endlicher Automat besteht aus:

(auch endl. Akzeptor oder deterministic finite automaton=DFA)

- Q, einer endlichen Menge von Zuständen;
- Σ, einer endlichen Menge von Eingabesymbolen, (Alphabet);
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, einer Übergangsfunktion;
- $s \in Q$, einem Startzustand;
- $F \subseteq Q$, einer Menge von Endzuständen.



Was tut ein endlicher Automat?

Wir erweitern die Def. von δ für Wörter:

$\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q$

$\hat{\delta}(q,aw) = \hat{\delta}(\delta(q,a),w)$ — ein Zustandsübergang je Eingabezeichen

$A = (Q,\Sigma,\delta,s,F)$ akzeptiert die Sprache

$L(A) := \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(s,w) \in F \right\}$ (Schöning: $T(A)$)

Äquivalente Definition:

$\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q$

$\hat{\delta}(q,wa) = \delta(\hat{\delta}(q,w),a)$

Beweis: Übung

Graphinterpretation

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$G_A = (Q, E)$

mit $e = (q, q') \in E$, Beschriftung $\ell(e) = a$ falls $q' = \delta(q, a)$

Multigraph!

Lemma:

$\forall w \in \Sigma^* : w \in L(A) \Leftrightarrow$

$\exists$Abarbeitungspfad $P = sq_1q_2 \cdots f = s \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_k} f$

mit $f \in F$, der mit $w = a_1 a_2 \cdots a_k$ beschriftet ist.

Beweis: Übung

Terminologie:

Wenn wir von Pfaden in A reden, meinen wir Pfade in G_A.

Notation für Pfade

$P = sq_1q_2 \cdots f$ Folge von Knoten

$P = s \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_k} f$ Folge von (direkten) Übergängen

$P = s \overset{w}{\Rightarrow} f$ mit $w = a_1 \cdots a_k$. P ist mit w beschriftet

$q \overset{*}{\Rightarrow} r$ es gibt Pfad von q nach r, d.h., r is von q aus erreichbar

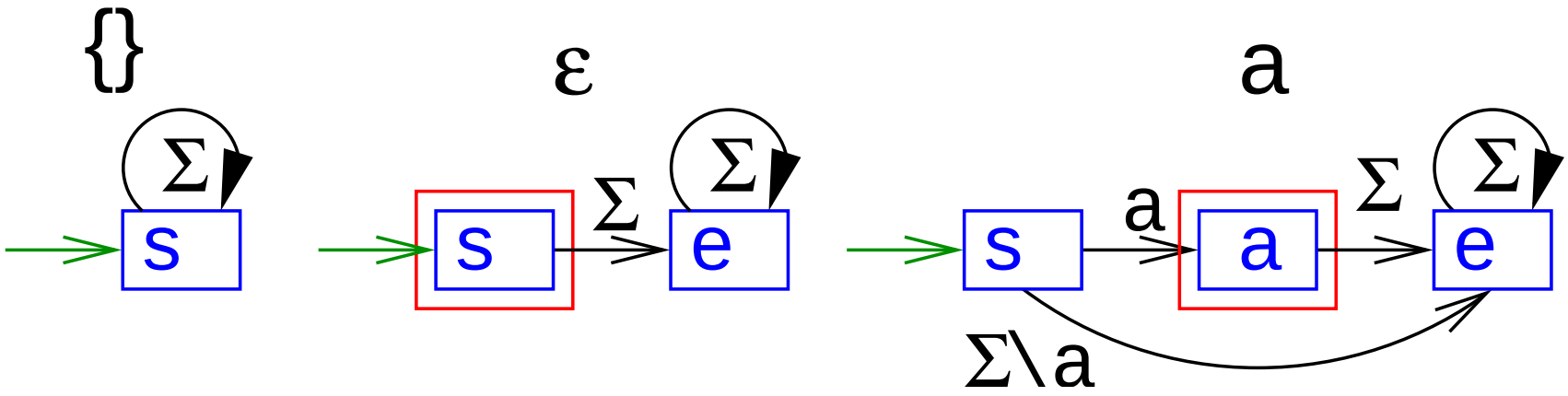
Es gilt $s \overset{*}{\Rightarrow} s$ (Reflexivität)

Dualität: Grammatiken $\leftrightarrow$ Maschinen

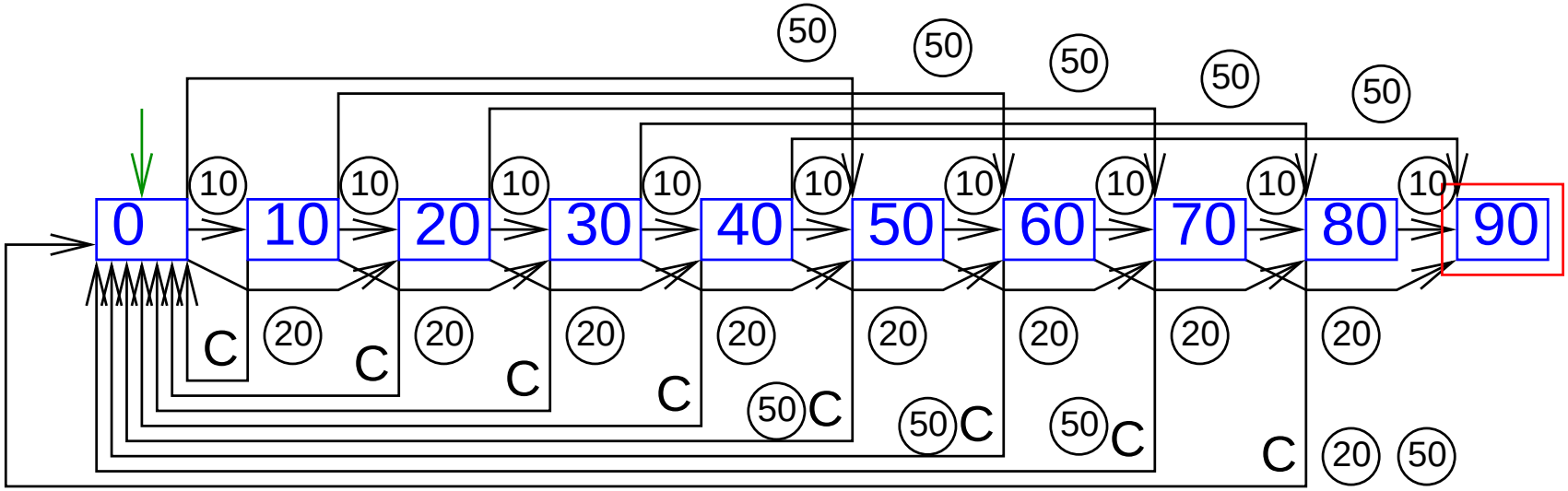
Grammatiken erzeugen Wörter.

Maschinen akzeptieren/erkennen/parsen/verbrauchen Wörter.

Endliche Automaten: Einfache Beispiele



Beispiel: Erfolgreiche Bezahlvorgänge



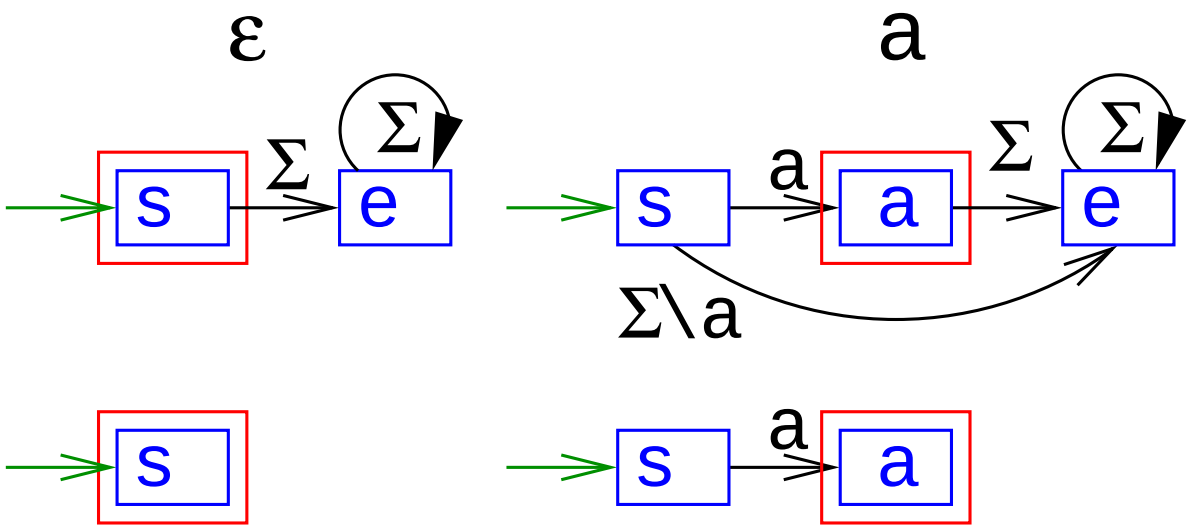
Vervollständigung

Oft geben wir nicht alle Funktionswerte von δ an.

Konvention: Es gibt immer einen Fehlerzustand e mit

$\delta(q,c) = e$ wenn kein anderer Wert angegeben.

$\delta(e,c) = e \forall c \in \Sigma$



Satz:

Durch DFAs erkennbare Sprachen sind vom Chomsky Typ3

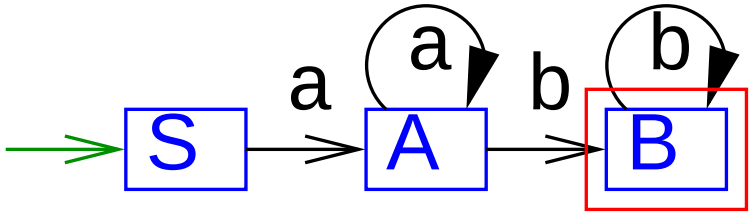
Sei $A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$ ein DFA.

Betrachte die Grammatik $G = (Z, \Sigma, P, S)$ mit

$$P = \{Q \to aQ' : \delta(Q,a) = Q'\} \cup$$
$$\{Q \to a : \delta(Q,a) = Q' \in F\} \cup$$
$$\{S \to \varepsilon : S \in F\} \quad .$$

z.Z. $L(G) = L(A)$ (ggf. ε eliminieren...)

Beispiel: $\{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$



$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$

q	c	$\delta(q,c)$	$\in P$
S	a	A	$S \to aA$
A	a	A	$A \to aA$
A	b	B	$A \to bB, A \to b$
B	b	B	$B \to bB, B \to b$

Was ist mit $\delta(S, b)$?

Durch DFAs erkennbare Sprachen sind vom Chomsky Typ3

Sei $A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$ ein DFA.

Betrachte die Grammatik $G = (Z, \Sigma, P, S)$ mit

$$P = \{Q \to aQ' : \delta(Q,a) = Q'\} \cup$$
$$\{Q \to a : \delta(Q,a) = Q' \in F\} \cup$$
$$\{S \to \varepsilon : S \in F\} \quad .$$

z.Z. $L(G) = L(A)$

Idee: $\exists$ 1-1 Beziehung zwischen

Ableitungen $S \Rightarrow w_1 A_1 \Rightarrow w_1 w_2 A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 w_2 \cdots w_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow w$ und

DFA Berechnungsspfaden $S \overset{w_1}{\Rightarrow} A_1 \overset{w_2}{\Rightarrow} A_2 \overset{w_3}{\Rightarrow} \cdots \overset{w_n}{\Rightarrow} f \in F$.

Beweis $L(G) = L(A)$:

Fall $w = \varepsilon$**:** $\varepsilon \in L(G) \Leftrightarrow S \to \varepsilon \in P \Leftrightarrow S \in F \Leftrightarrow \varepsilon \in L(A)$

$A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$, $G = (Z, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{Q \to aQ' : \delta(Q,a) = Q'\} \cup$
$\{Q \to a : \delta(Q,a) = Q' \in F\} \cup \{S \to \varepsilon : S \in F\}$

Beweis(skizze) $L(G) = L(A)$ **Fall** $|w| = n$**,** $n > 0$:

$w_1 \cdots w_n \in L(G)$

$\Leftrightarrow S \Rightarrow w_1 A_1 \Rightarrow w_1 w_2 A_2 \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1 \cdots w_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow w_1 \cdots w_n$

$\Leftrightarrow \{S \to w_1 A_1, A_1 \to w_2 A_2, \ldots, A_{n-2} \to w_{n-1} A_{n-1}, A_{n-1} \to w_n\} \subseteq P$

$\Leftrightarrow \delta(S, w_1) = A_1, \delta(A_1, w_2) = A_2, \ldots, \delta(A_{n-1}, w_n) = A_n \in F$

$\Leftrightarrow \exists$ Berechnungspfad $S \stackrel{w_1}{\Rightarrow} A_1 \stackrel{w_2}{\Rightarrow} A_2 \stackrel{w_3}{\Rightarrow} \cdots A_{n-1} \stackrel{w_n}{\Rightarrow} A_n \in F$

$\Leftrightarrow w_1 \cdots w_n \in L(A)$

(In 2 Richtungen lesen. '$\Leftrightarrow$' jeweils begründen) ■

$A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$, $G = (Z, \Sigma, P, S)$ mit $P = \{Q \to aQ' : \delta(Q, a) = Q'\} \cup \{Q \to a : \delta(Q, a) = Q' \in F\} \cup \{S \to \varepsilon : S \in F\}$

1.2.2 Nichtdeterministische (endliche) Automaten NFA

Satz: Chomsky Typ3 Sprachen sind durch endliche Automaten erkennbar.

(Umkehrung des Hauptsatzes von Abschnitt 1.2.1)

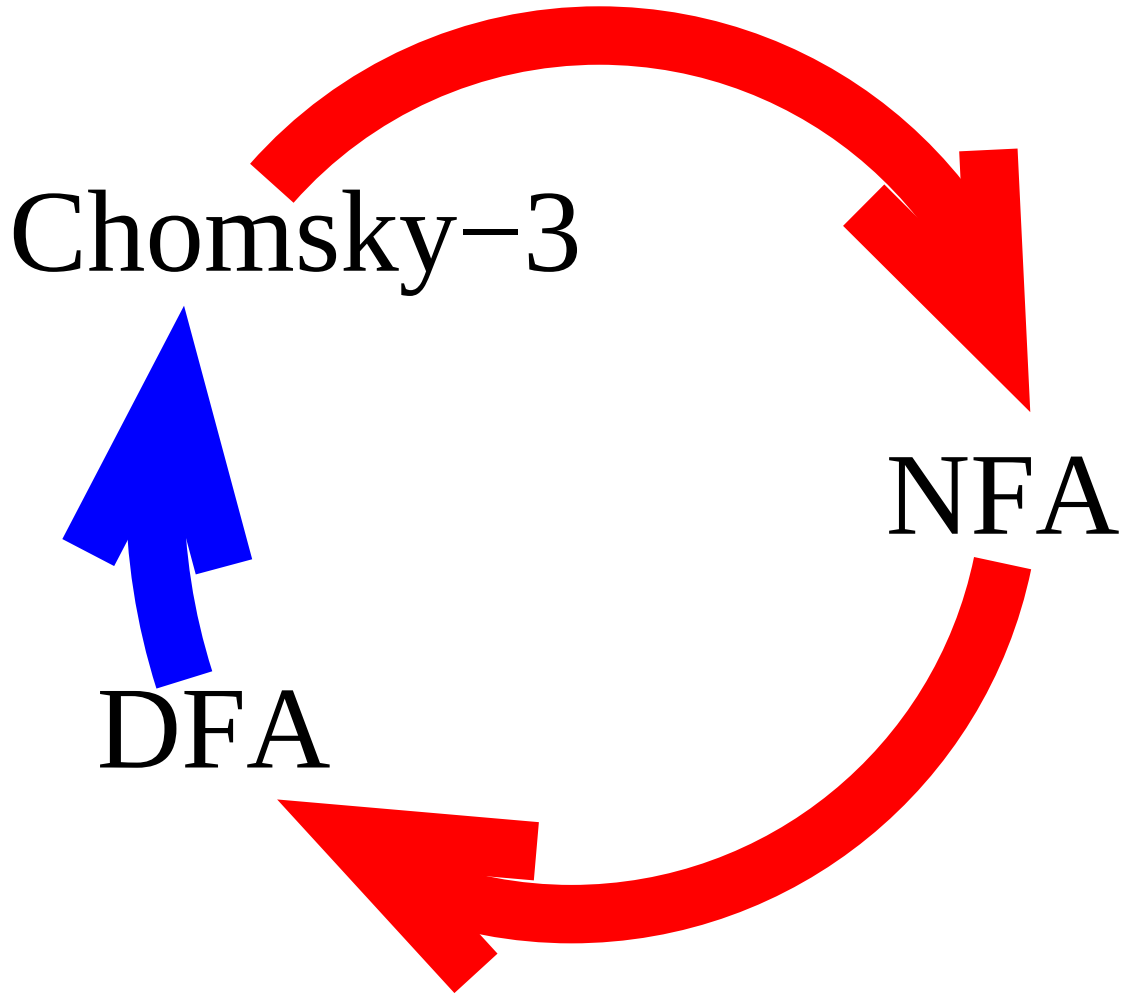
Problem: Beweis umdrehbar ?

Nicht mit DFA !

z.B. ist aktuelle Variable

bei Chomsky-3 Ableitungen nicht eindeutig bestimmt.

Der Plan



Nichtdeterministische endliche Automaten NFA

- mehrere erlaubte Übergange für gegebenes Situation (Zustand, Eingabezeichen)

Nichtdeterministischer endlicher Automat A

- Q, Zustandsmenge
- Σ, Eingabealphabet
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$, Übergangsfunktion
- $s \in Q$, Startzustand
- $F \subseteq Q$, Endzustände

Zustandsübergang von q nach q' bei Eingabe von a: $q' \in \delta(q,a)$

i.allg. mehrere Möglichkeiten!

Nichtdeterministischer endlicher Automat A

Variante (äquivalent) — δ als Relation.

- Q, Zustandsmenge
- Σ, Eingabealphabet
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ Übergangsrelation
- $s \in Q$, Startzustand
- $F \subseteq Q$, Endzustände

A kann Zustandsübergang von q nach q' machen wenn a eingegeben wird und $(q, a, q') \in \delta$.

Erweiterung von δ

Zustandsmengen: $\bar{\delta} : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q$

$$\bar{\delta}(M,a) := \bigcup_{p \in M} \delta(p,a)$$

Zustandsmengen und Eingabeworte: $\hat{\delta} : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

$$\hat{\delta}(M,\varepsilon) := M$$
$$\hat{\delta}(M,aw) := \hat{\delta}(\bar{\delta}(M,a),w)$$

$$L(A) := \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\{s\},w) \cap F \neq \emptyset \right\}$$

(Multi)Graphinterpretation für $L(A)$

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$G_A = (Q, E)$ Funktionsinterpretation von δ

mit $e = (q, q') \in E$, Beschriftung $\ell(e) = a$ falls $q' \in \delta(q, a)$

$G_A = (Q, \delta)$ Relationeninterpretation von δ

schreibe Kanten e mit $\ell(e) = a$ als (q, a, q').

„Multi“=parallele Kanten erlaubt (unterschiedliche Beschriftungen)

$w \in L(A) \Leftrightarrow \exists$ Pfad $P = s \overset{a_1}{\Rightarrow} q_1 \overset{a_2}{\Rightarrow} \cdots \overset{a_k}{\Rightarrow} f$ in A (in G(A)) :

$$f \in F \wedge w = a_1 a_2 \cdots a_k$$

In Worten: Ein Pfad von s zu einem Endzustand ist mit w beschriftet.

Lemma: $\hat{\delta}(M,w) = \left\{q \in Q : \exists p \in M : p \stackrel{w}{\Rightarrow} q\right\}$

Beweis durch Induktion über $|w|$:

$\hat{\delta}(M,\varepsilon) = \{s\}$

$n \rightsquigarrow n+1$:

$\hat{\delta}(M,aw) = \hat{\delta}(\bar{\delta}(M,a),w)$

$= \left\{r \in Q : \exists q \in \bar{\delta}(M,a) : q \stackrel{w}{\Rightarrow} r\right\}$ (IV)

$= \left\{r \in Q : \exists p \in M, q \in \delta(p,a) : q \stackrel{w}{\Rightarrow} r\right\}$ (Def. $\bar{\delta}$)

$= \left\{r \in Q : \exists p \in M : p \stackrel{aw}{\Rightarrow} r\right\}$ (Graphint.)

□

Korollar: $L(A) = \left\{w \in \Sigma^* : \exists z \in F : s \stackrel{w}{\Rightarrow} z\right\}$

NFA→DFA

Gegeben: NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

Satz: (Potenzmengenkonstruktion)

[Rabin, Scott 1959, IBM J. of R&D]

DFA $A' := (2^Q, \Sigma, \bar{\delta}, \{s\}, \{M \subseteq Q : M \cap F \neq \emptyset\})$ akzeptiert $L(A)$.

Übung: Entwerfen Sie einen Algorithmus, dessen Eingabe der NFA A und ein Wort w ist und der $\hat{\delta}(\{s\}, w)$ in Zeit $\mathcal{O}(|w| \cdot |\delta|)$ berechnet. Dabei ist $|\delta|$ die Anzahl Einträge der Form $p \in \delta(q, a)$, die benötigt wird, um δ zu definieren.

Potenzmengenkonstruktion

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$A' := (2^Q, \Sigma, \bar{\delta}, \{s\}, F'), F' := \{M \subseteq Q : M \cap F \neq \emptyset\}$

Behauptung: $L(A') = L(A)$

Beweis:

$$L(A) = \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset \right\} \qquad \text{Def. L(A)}$$

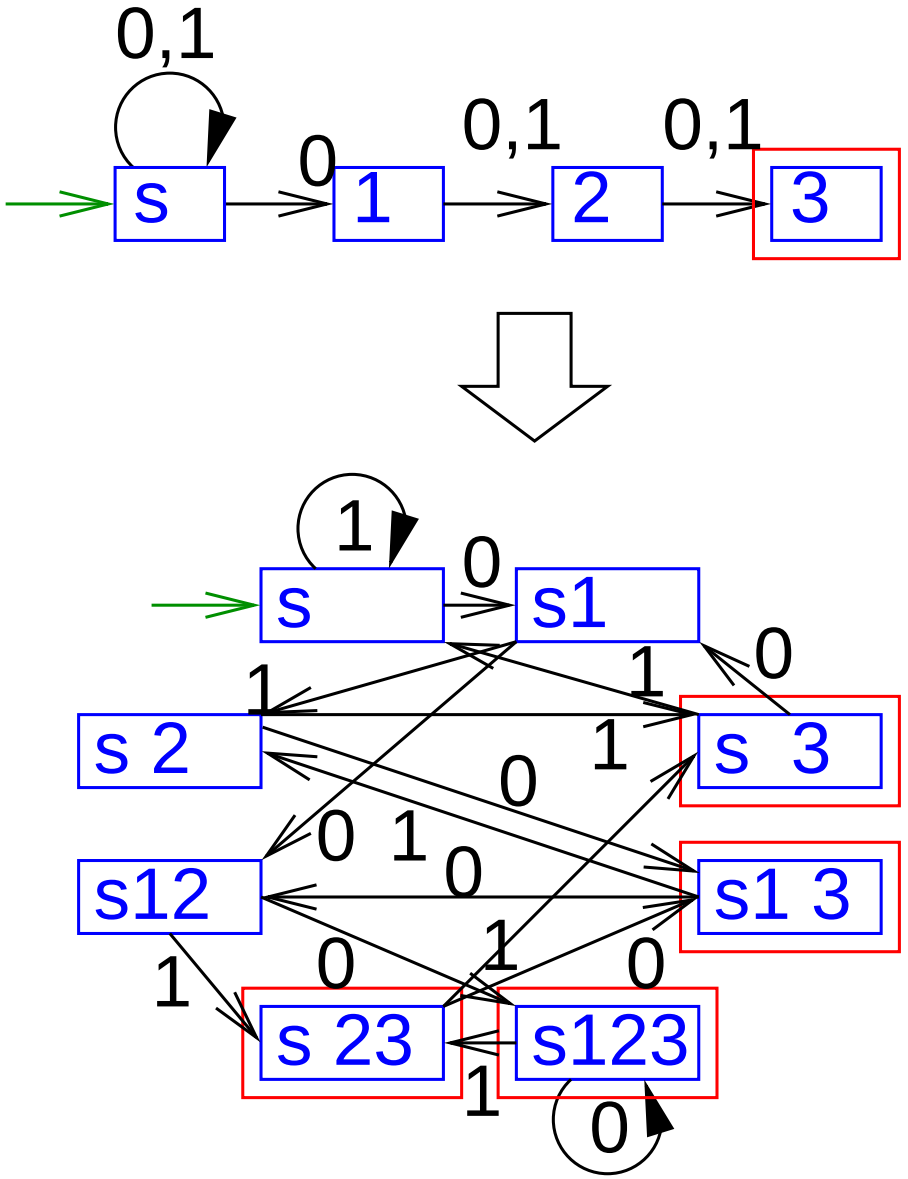
$$= \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\{s\}, w) \in F' \right\} \qquad \text{Def. F'}$$

$$= L(A') \qquad \text{Def. L(A')}$$

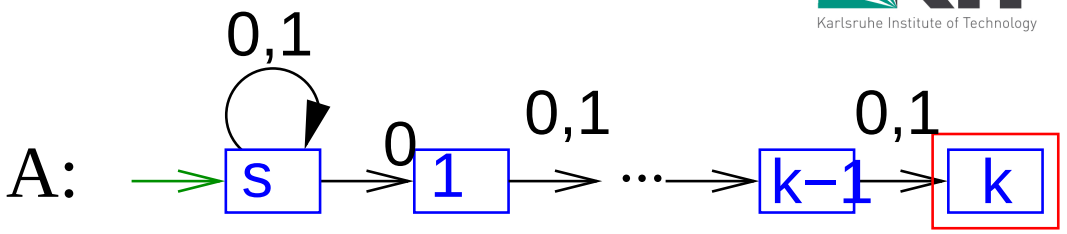
($\hat{\delta}$ tanzt hier auf zwei Hochzeiten !) □

Beispiel

q	$\bar{\delta}(q,0)$	$\bar{\delta}(q,1)$
s	$s,1$	s
$s,1$	$s,1,2$	$s,2$
$s,2$	$s,1,3$	$s,3$
$s,3$	$s,1$	s
$s,1,2$	$s,1,2,3$	$s,2,3$
$s,1,3$	$s,1,2$	$s,2$
$s,2,3$	$s,1,3$	$s,3$
$s,1,2,3$	$s,1,2,3$	$s,2,3$



Allgemeineres Beispiel



Satz: $\nexists$DFA $A' = (Q, \Sigma, \delta, s, F) : L(A') = L(A) \wedge |Q| < 2^k$

Beweis: Annahme: $\exists A'$

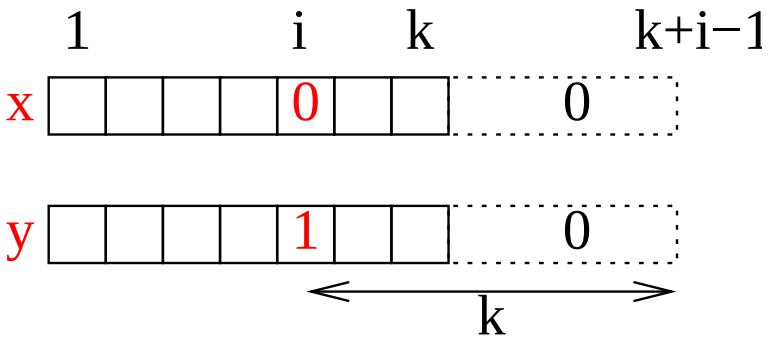
$\longrightarrow \exists x \neq y \in \{0,1\}^k : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y)$ (Schubfachprinzip)

wähle i mit $x[i] \neq y[i]$,

OBdA gilt $x[i] = 0, y[i] = 1$

Also $x0^{i-1} \in L(A)$

und $y0^{i-1} \notin L(A)$.



Aber, $\hat{\delta}(s, x0^{i-1}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(s,x), 0^{i-1})$

$= \hat{\delta}(\hat{\delta}(s,y), 0^{i-1}) = \hat{\delta}(s, y0^{i-1})$.

Also werden $x0^{i-1}$ und $y0^{i-1}$ entweder beide akzeptiert oder beide abgelehnt.

Widerspruch. □

Implementierungshinweise

Nur von $\{s\}$ aus erreichbare Teilmengen erzeugen:

$Q' := \{\{s\}\}$ // states of A'

Queue todo:= Q'

while $\exists M \in$ todo **do**

  todo:= todo$\setminus\{M\}$

  foreach $a \in \Sigma$ **do**

    if $M' = \bar{\delta}(M,a) \notin Q'$ **then**

      insert M' into Q'

      insert M' into todo

Oft $|Q'| \ll 2^{|Q|}$!

Typ-3→NFA

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ3 Grammatik.

Betrachte den NFA $A = (V \cup \{f\}, \Sigma, \delta, S, \{f\} \cup \{S : S \to \varepsilon \in P\})$

mit

$$\delta = \{(q, a, q') : q \to aq' \in P\} \cup$$
$$\{(q, a, f) : q \to a \in P\}$$

(Relationennotation v. δ).

Es gibt eine 1-1 Beziehung zwischen Ableitungen der Form

$S \Rightarrow w_1 A_1 \Rightarrow w_1 w_2 A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 w_2 \cdots w_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow w$ in G und

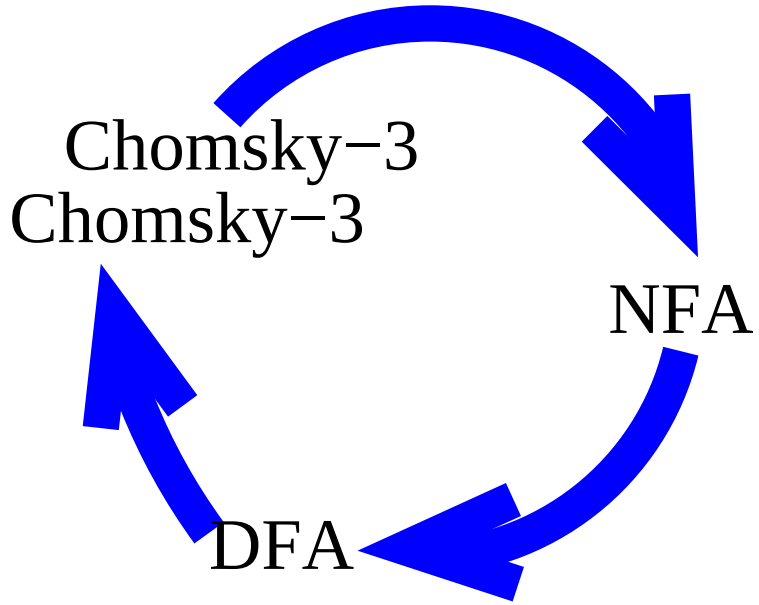
akzeptierenden Pfaden der Form

$S \xrightarrow{w_1} A_1 \xrightarrow{w_2} A_2 \xrightarrow{w_3} \cdots \xrightarrow{w_n} f$ durch A.

Also ist $L(A) = L(G)$. ■

Mehrdeutigkeit bei Typ-3

Satz: $\forall L \in$ Typ-3 $: \exists$ Typ-3 Grammatik mit eindeutigen Ableitungen.



Beweisskizze: Sei A DFA mit $L(A) = L$.

Die zu A korrespondierende Typ-3 Grammatik hat eindeutige Ableitungen.

1.2.3 Reguläre Ausdrücke

Ein regulärer (?) Ausdruck beschreibt eine reguläre (?) Sprache.

Ausdruck	beschreibt	Bemerkung
$\emptyset$	$\emptyset$	
ε	$\{\varepsilon\}$	
a	$\{a\}$	$a \in \Sigma$
$\alpha \cup \beta$	$L(\alpha) \cup L(\beta)$	α beschreibt $L(\alpha)$ (Synonym: $\alpha \mid \beta$)
$\alpha \cdot \beta$	$L(\alpha) \cdot L(\beta)$	β beschreibt $L(\beta)$
(α)	$L(\alpha)$	
α^*	$L(\alpha)^*$	
α^+	$L(\alpha)^+$	

Nachlässigkeiten: '$\cdot$' weglassen, $L(\cdot)$ weglassen

Syntax (reg. Ausdrücke) versus Semantik (reg. Sprachen)

Computerprogramme bearbeiten syntaktische Objekte.

Programmverifikation

Wir beweisen auf semantischer Ebene, dass die Objekte korrekt verarbeitet werden.

Beispiele

- vorletztes Zeichen 0: $(0 \cup 1)^* 0 (0 \cup 1)$
- enthält 10: $(0 \cup 1)^* 10 (0 \cup 1)^*$
- enthält nicht 10: $0^* 1^*$
- enthält 101: $(0 \cup 1)^* 101 (0 \cup 1)^*$
- enthält nicht 101: $0^* 1^* \cup (0^* 1^* 100)^* 0^* 1^* 10 (\varepsilon \cup 00^* 1^*)$
- ganze Zahl: $(\varepsilon \cup + \cup -)(1 \cup \cdots \cup 9)(0 \cup \cdots \cup 9)^* \cup 0$

Satz: Reguläre Ausdrücke $\Leftrightarrow$ Typ-3 Sprachen

[Kleene]

Der Plan

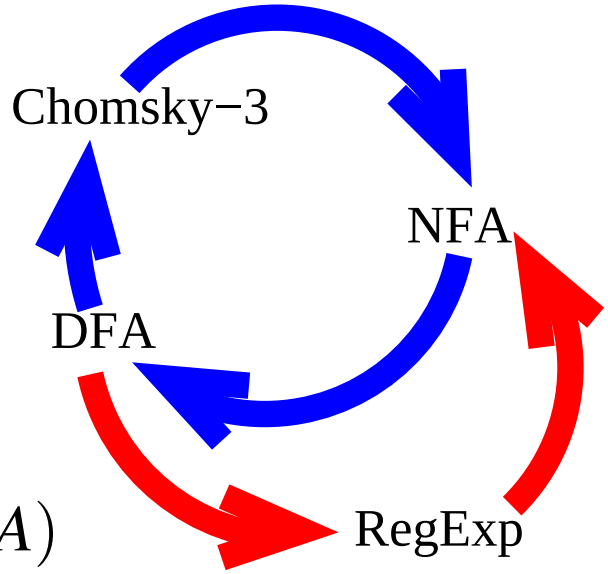
zu zeigen:

$\rightarrow$ regulärer Ausdruck α

$\rightsquigarrow$ NFA A mit $L(\alpha) = L(A)$

$\leftarrow$ DFA A

$\rightsquigarrow$ regulärer Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(A)$



Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA

Beweisidee:

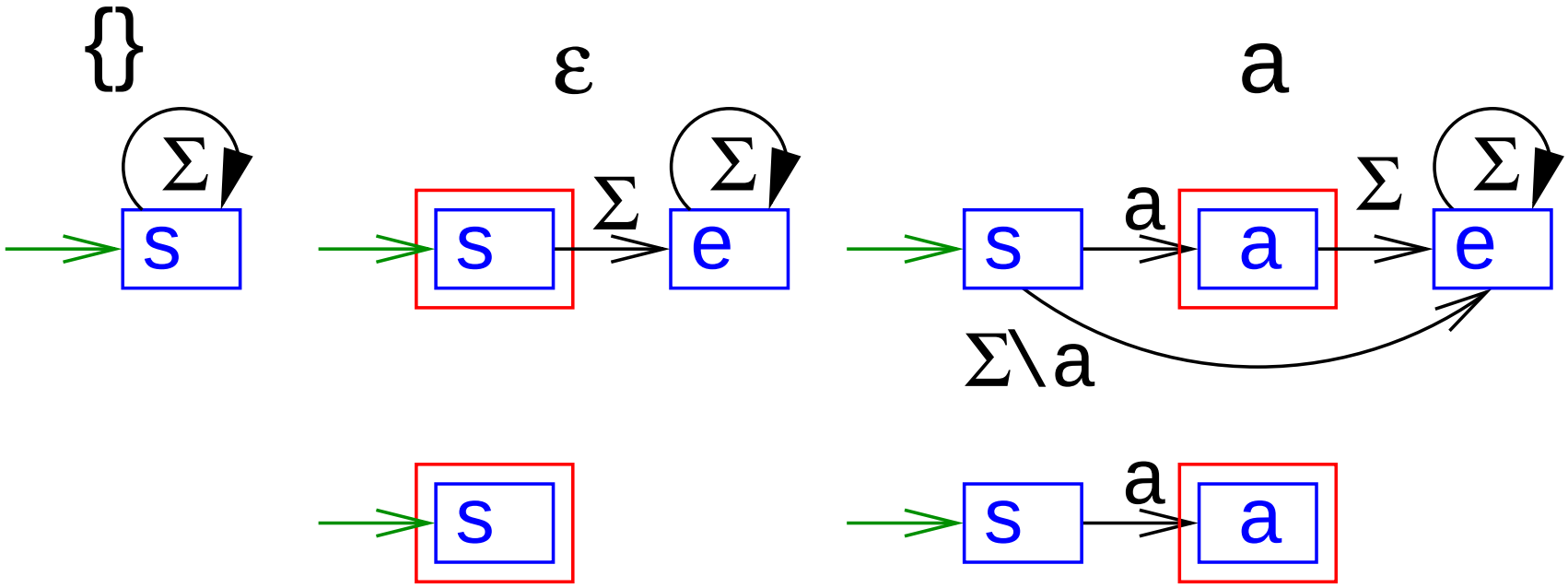
baue Automaten für Teilausdrücke

stöpsle diese zu Automaten für komplexere Ausdrücke zusammen

Theoretikersprache:

Strukturelle Induktion über die Struktur eines regulären Ausdrucks.

Basisfälle



RegExp→NFA: $L_1 \cup L_2$

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ mit $L(A_1) = L_1$

$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ mit $L(A_2) = L_2$

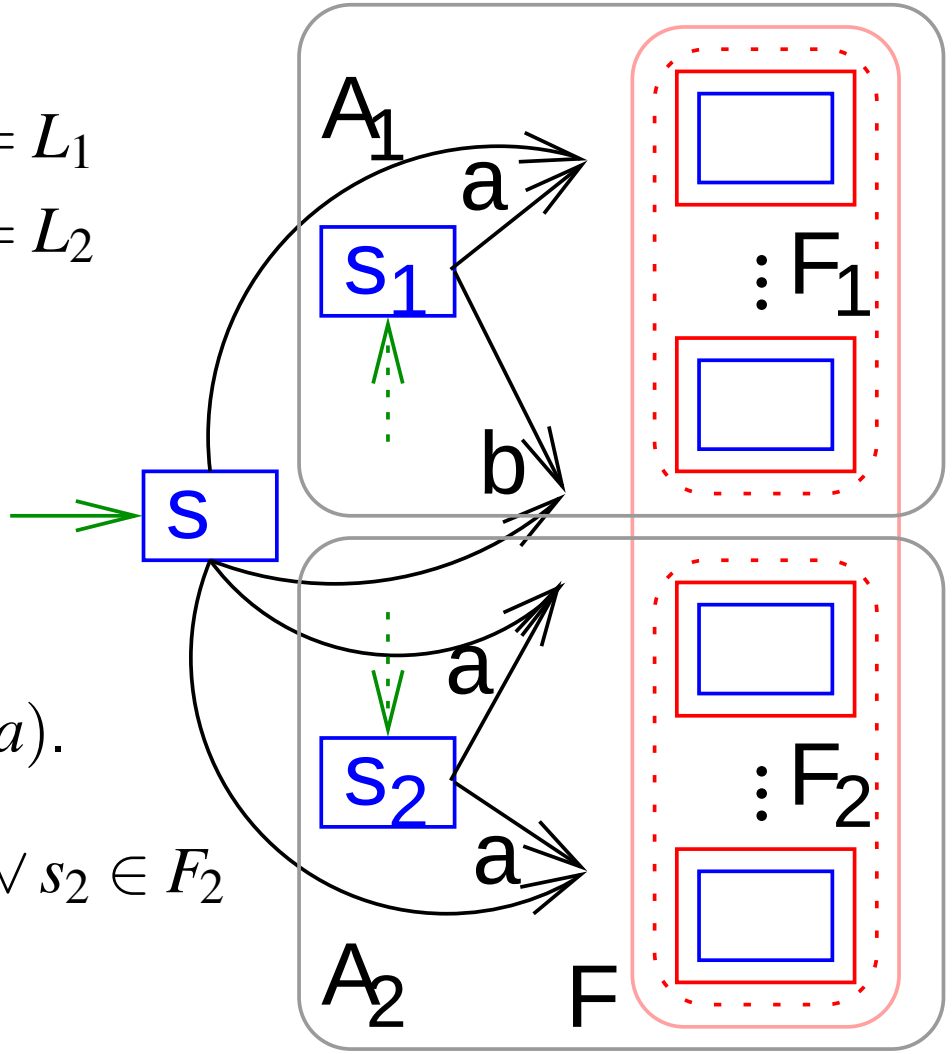
sowie $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (\{s\} \cup Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s, F)$

δ verhält sich wie $\delta_{1/2}$ für $Q_{1/2}$

$\forall a \in \Sigma : \delta(s,a) := \delta(s_1,a) \cup \delta(s_2,a).$

$$F := \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s\} & \text{falls } s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2 \\ F_1 \cup F_2 & \text{sonst} \end{cases}$$



Beweis von $L_1 \cup L_2 \subseteq L(A)$

Sei $w \in L_1 = L(A_1)$ beliebig.

Fall $w = \varepsilon$

$\longrightarrow s_1 \in F_1 \longrightarrow s \in F \longrightarrow w \in L(A)$.

Fall $w = ax$:

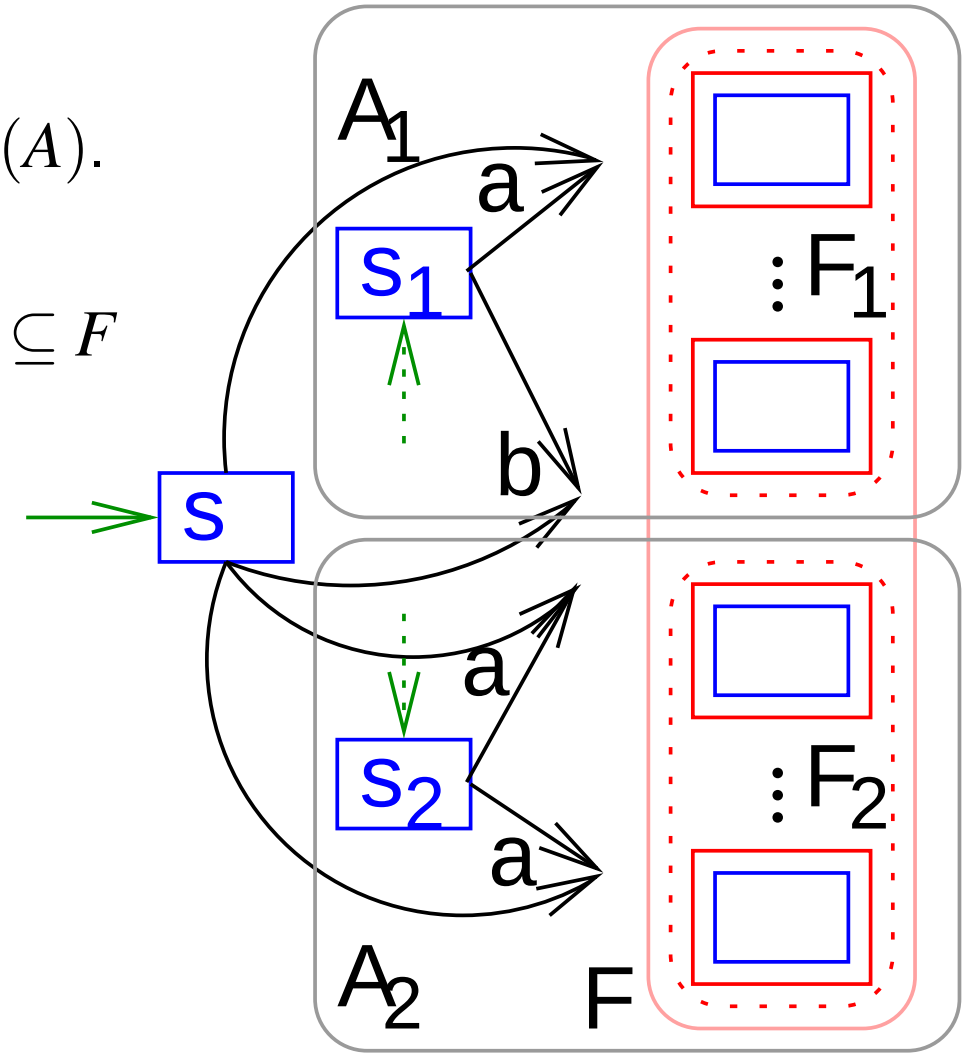
$\longrightarrow \exists$ Pfad $P_1 = s_1 \overset{a}{\Rightarrow} q_1 \overset{x}{\Rightarrow} f_1 \in F_1 \subseteq F$

$\longrightarrow \exists$ Pfad $P = s \overset{a}{\Rightarrow} q_1 \overset{x}{\Rightarrow} f_1 \in F$

$\longrightarrow w \in L(A)$.

$w \in L_2 = L(A_2)$

$\longrightarrow \cdots \rightarrow w \in L(A)$.



Beweis von $L(A) \subseteq L_1 \cup L_2$

Sei $w \in L(A)$ beliebig.

Fall $w = \varepsilon \longrightarrow s \in F \longrightarrow s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2$

$\longrightarrow \varepsilon \in L_1 \vee \varepsilon \in L_2 \longrightarrow \varepsilon \in L_1 \cup L_2$

Fall $w = ax$:

$\longrightarrow \exists$ Pfad $P = s \overset{a}{\Rightarrow} q \overset{x}{\Rightarrow} f \in F$.

Fall $q = q_1 \in Q_1$:

$\longrightarrow \exists$ Pfad $P_1 = s_1 \overset{a}{\Rightarrow} q_1 \overset{x}{\Rightarrow} f \in F_1$.

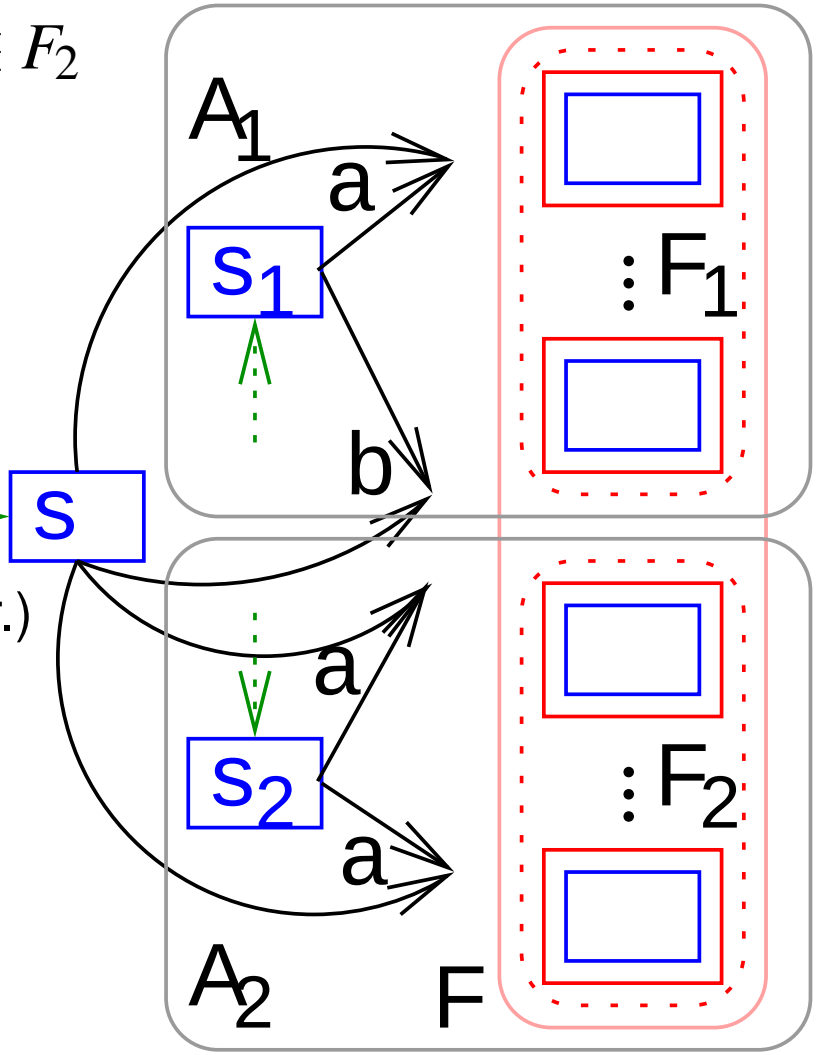
(von q_1 sind nur Zustände in Q_1 erreichbar.)

$\longrightarrow ax = w \in L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$

sonst: $\longrightarrow q = q_2 \in Q_2$

$\longrightarrow \exists$ Pfad $P_2 = s_2 \overset{a}{\Rightarrow} q_2 \overset{x}{\Rightarrow} f \in F_2$.

$\longrightarrow ax = w \in L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$



□

$L_1 \cdot L_2$

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ mit $L(A_1) = L_1$

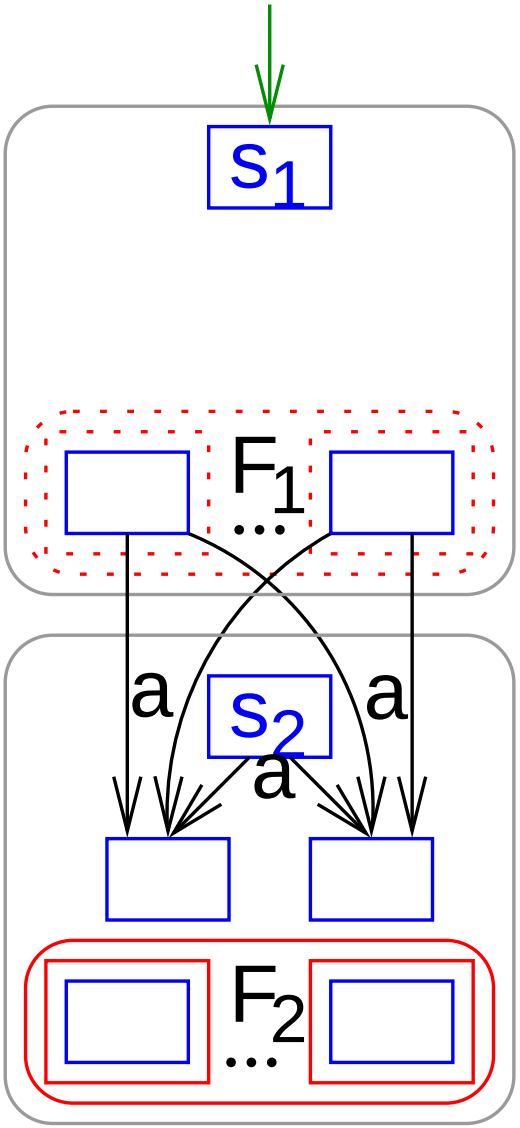
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ mit $L(A_2) = L_2$

sowie $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s_1, F), \forall a \in \Sigma :$

$$\delta(q,a) := \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{falls } q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q,a) \cup \delta_2(s_2,a) & \text{falls } q \in F_1 \\ \delta_2(q,a) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F := \begin{cases} F_1 \cup F_2 & \text{falls } s_2 \in F_2 \\ F_2 & \text{sonst} \end{cases}$$



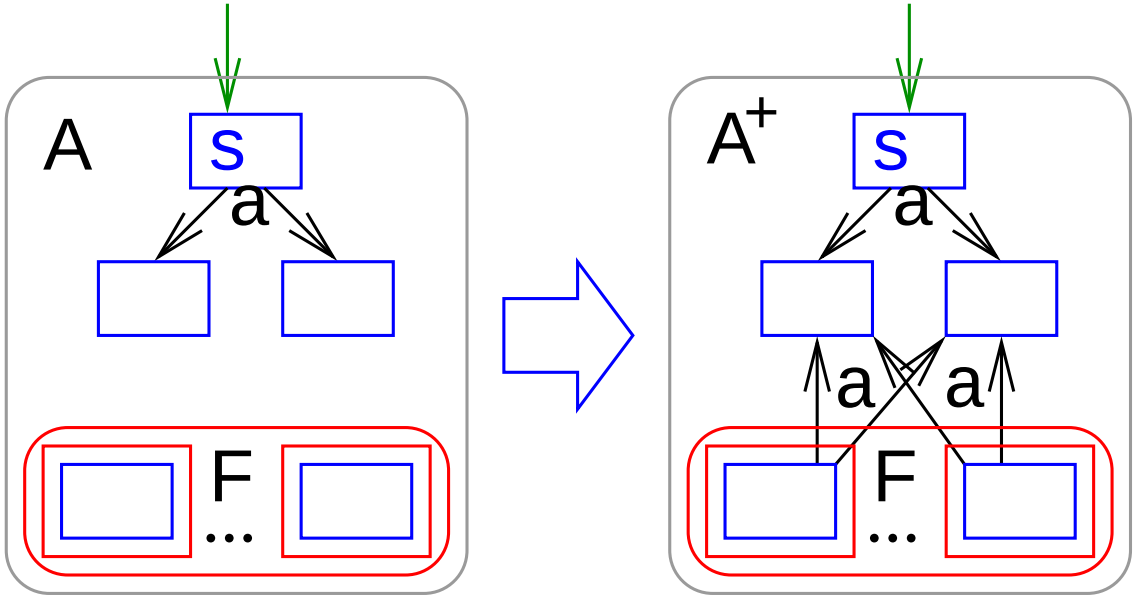
Beweis: Übung

Positive Hülle $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$

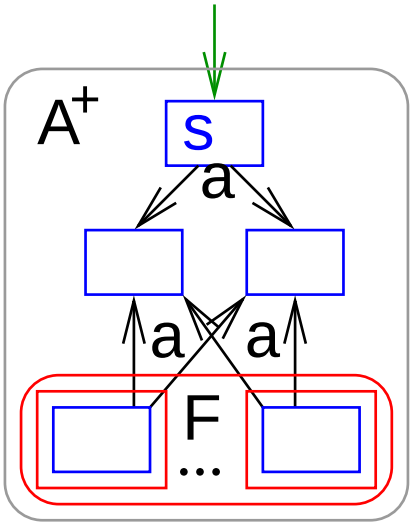
$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $L(A) = L$

$A^+ := (Q, \Sigma, \delta^+, s, F), \forall a \in \Sigma:$

$$\delta^+(q,a) := \begin{cases} \delta(q,a) & \text{falls } q \in Q \setminus F \\ \delta(q,a) \cup \delta(s,a) & \text{falls } q \in F \end{cases}$$



Beweis von $L(A^+) \subseteq L^+$



Sei $w \in L(A^+)$ beliebig (OBdA $w \neq \varepsilon$)

Sei $P = s \overset{a_0}{\Rightarrow} q_0 \overset{*}{\Rightarrow} f$ ein akzeptierender Pfad für w.

Zerlege P an Übergängen der Form $f_j \overset{a_j}{\Rightarrow} q_j$

mit $q_j \notin \delta(f_j, a_j)$, $j \in 1..i$, $i \geq 0$.

$\longrightarrow q_j \in F$, $q_j \in \delta(s, a_j)$.

$$P = s \overbrace{\overset{a_0}{\Rightarrow} q_0 \overset{x_0}{\Rightarrow} f_1 \overset{a_1}{\Rightarrow} q_1 \overset{x_1}{\Rightarrow} f_2 \overset{*}{\Rightarrow} f_i \overset{a_i}{\Rightarrow} q_i \overset{x_i}{\Rightarrow}}^{a_0 x_0 a_1 x_1 \cdots a_i x_i = w} f$$

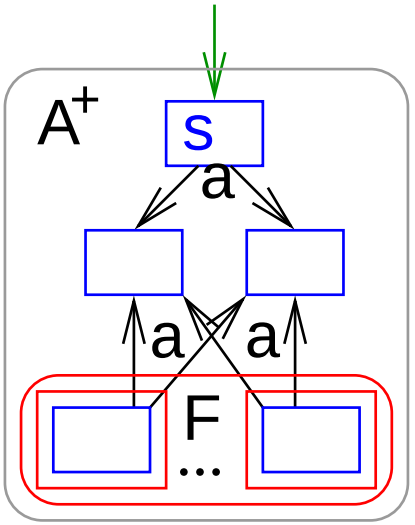
Definiere $P_j := s \overset{a_j}{\Rightarrow} q_j \overset{x_j}{\Rightarrow} f_{j+1}$ (mit $f_{i+1} := f$).

$\longrightarrow \forall j \in 0..i : P_j$ ist akzeptierender Pfad in A.

$\longrightarrow w \in L^+$

□

Beweis von $L^i \subseteq L(A^+)$ für $i \geq 1$



Sei $w = w_1 \cdots w_i \in L^i$ beliebig (OBdA $\varepsilon \neq w_i \in L$).

Betrachte Pfade $P_j = s \overset{a_j}{\Rightarrow} q_j \overset{x_j}{\Rightarrow} f_j$, $j \in 1..i$, $f_j \in F$, die

$w_1 \in L, \ldots, w_i \in L$ bezeugen.

$$\longrightarrow P = s \overbrace{\overset{a_1}{\Rightarrow} q_1 \overset{x_1}{\Rightarrow} f_1 \overset{a_2}{\Rightarrow} q_2 \overset{x_2}{\Rightarrow} f_2 \overset{*}{\Rightarrow} f_{i-1} \overset{a_i}{\Rightarrow} q_i \overset{x_i}{\Rightarrow}}^{w} f_i$$

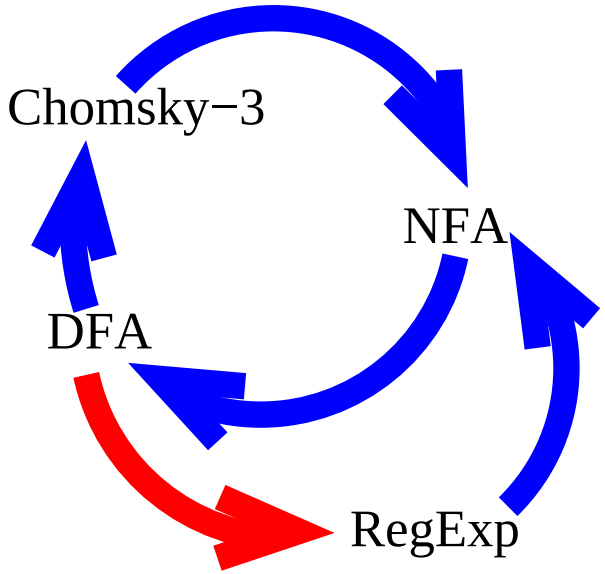
ist Pfad in A^+, der $w \in L(A^+)$ bezeugt.

$\longrightarrow w \in L(A^+)$ □

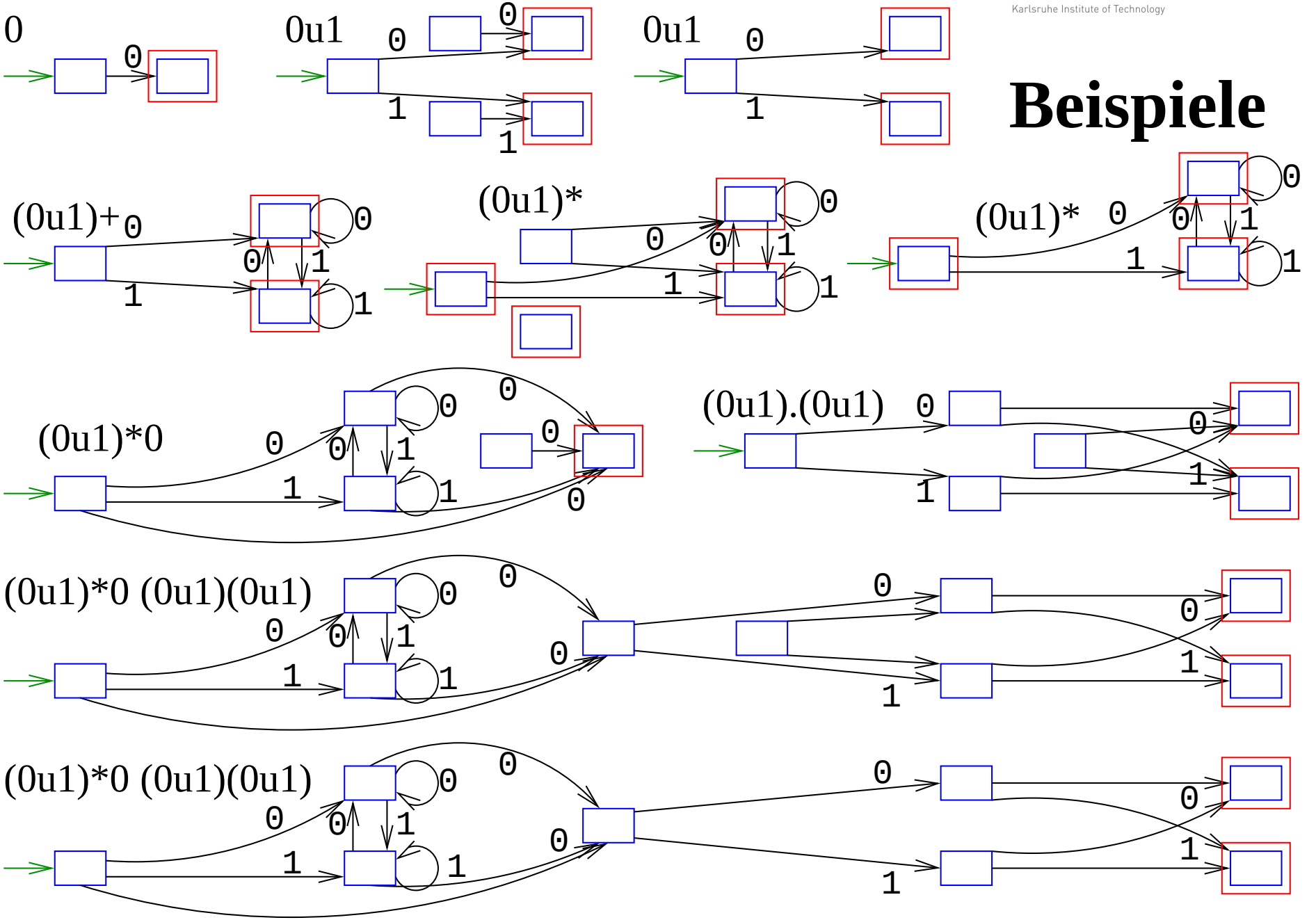
Kleensche Hülle L^*

Baue Automaten für $\varepsilon \cup L^+ = L^*$.

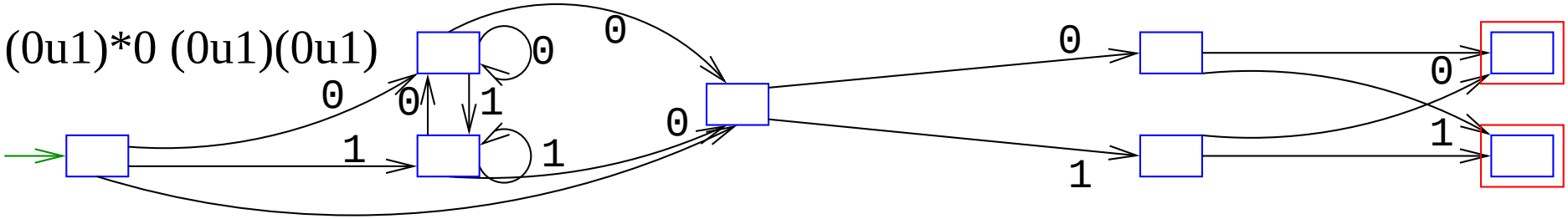
■

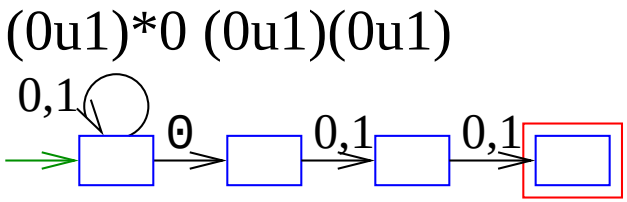


Beispiele



Beispiele





Exkurs: Anwendung Texte durchsuchen

Unix-Tool grep:`grep REGULAR-EXPRESSION FILE`

- Suche all Teilstrings in FILE, die in $L(\text{REGULAR-EXPRESSION})$ sind
- Viel syntaktischer Zuckerguß: Bereiche `a-g`, vordefinierte Ausdrücke z.B. `:alnum:`,vorgegebene Anzahl Wiederholungen,...
- Aber alles ist leicht in einfache reg. Ausdrücke übersetzbar.
- Schnelle Ausführung durch Übersetzung in deterministische endliche Automaten.

Anwendung Scanner-(Generatoren), `lex`, `flex`

Eingabe: Ein System von regulären Ausdrücken

Ausgabe: Ein endlicher Automat (C code),

Laufzeit-Eingabe: Das Programm als Zeichenkette

Laufzeit-Ausgabe: Das Programm als Folge von Token (Pakete) wie Zahl, Bezeichner, Schlüsselwort.

- zeitkritisch, weil nur hier jedes einzelne Zeichen angefasst wird, Kommentare weggeworfen werden, Dezimalzahlen binär gewandelt werden,...
- normiert die Darstellung, durch Entfernen von Leerzeichen Varianten von Zahlrepräsentationen,...
- vereinfacht die nachfolgende Syntaxanalyse

Ähnliche Funktionalität

- Editoren, z.B. emacs
- Skript-Sprachen wie Perl (berüchtigt?)
- `java.util.regex` Bibliothek
- C++ regex Bibliothek
- .net framework
- Vorverarbeitung beim Parsing von xml Dokumenten

Exkurs: ε-Übergänge

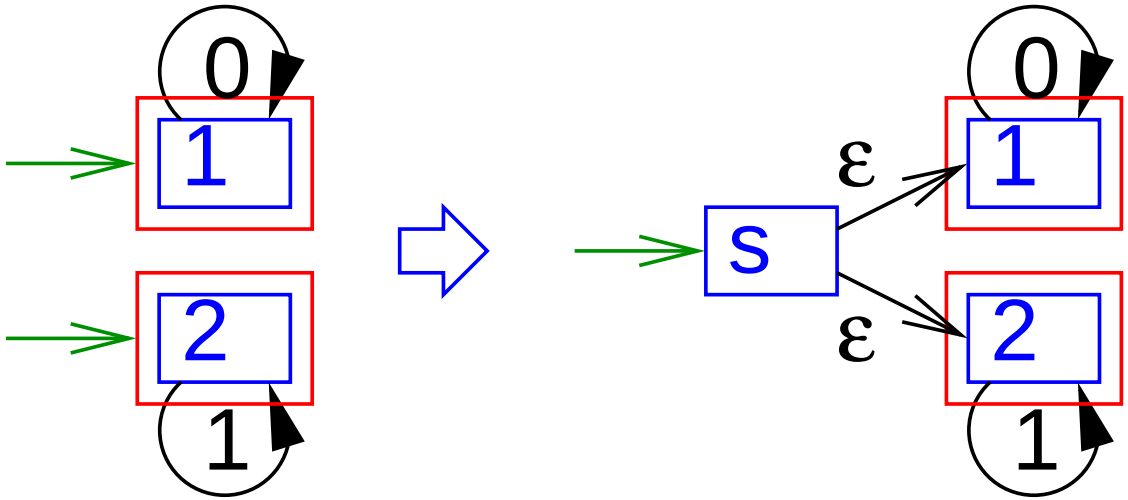
wir erlauben spontane Übergänge

ohne Verbrauch eines Eingabezeichens.

εNFA

- Q, Zustandsmenge
- Σ, Eingabealphabet
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \to 2^Q$, Übergangsfunktion
- $s \in Q$, Startzustand
- $F \subseteq Q$, Endzustände

Beispiel: $0^* \cup 1^*$



RegExp→ εNEA: $L_1 \cup L_2$

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ mit $L(A_1) = L_1$

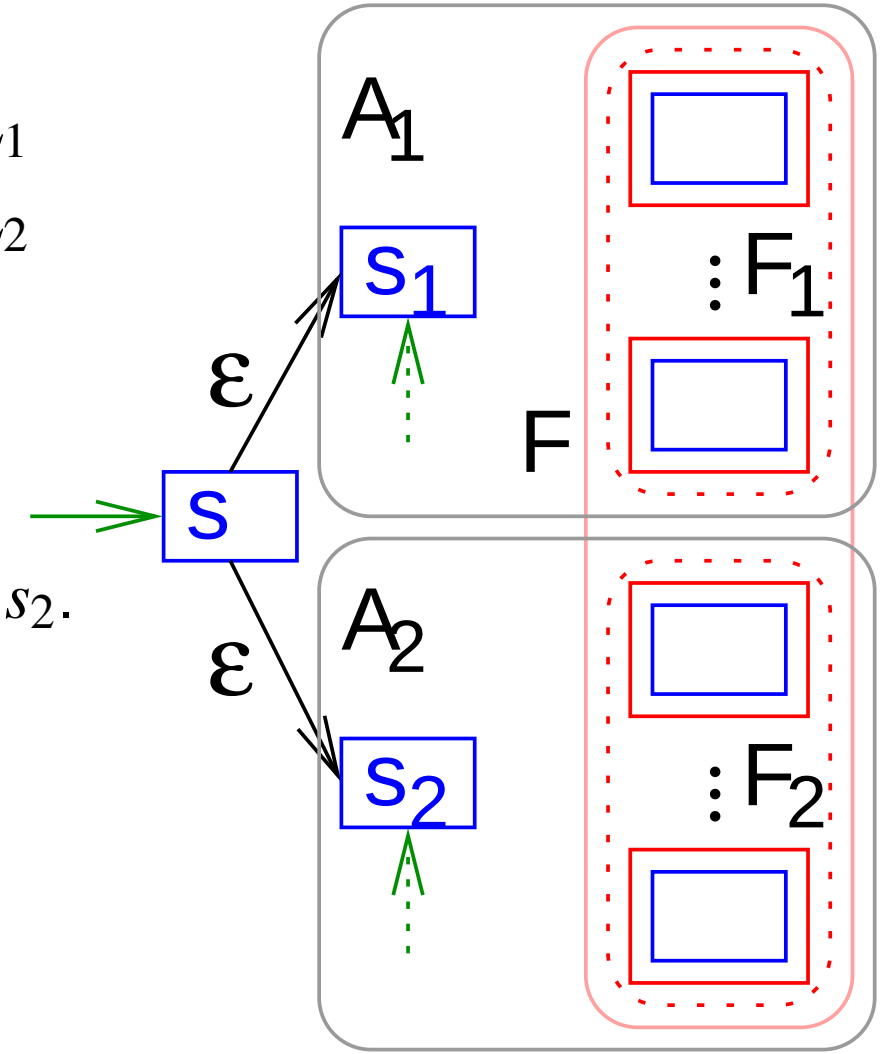
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ mit $L(A_2) = L_2$

sowie $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (\{s\} \cup Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s, F_1 \cup F_2)$

δ verhält sich wie $\delta_{1/2}$ für $Q_{1/2}$

spontane Übergange von s nach s_1 und s_2.



$L_1 \cdot L_2$

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ mit $L(A_1) = L_1$

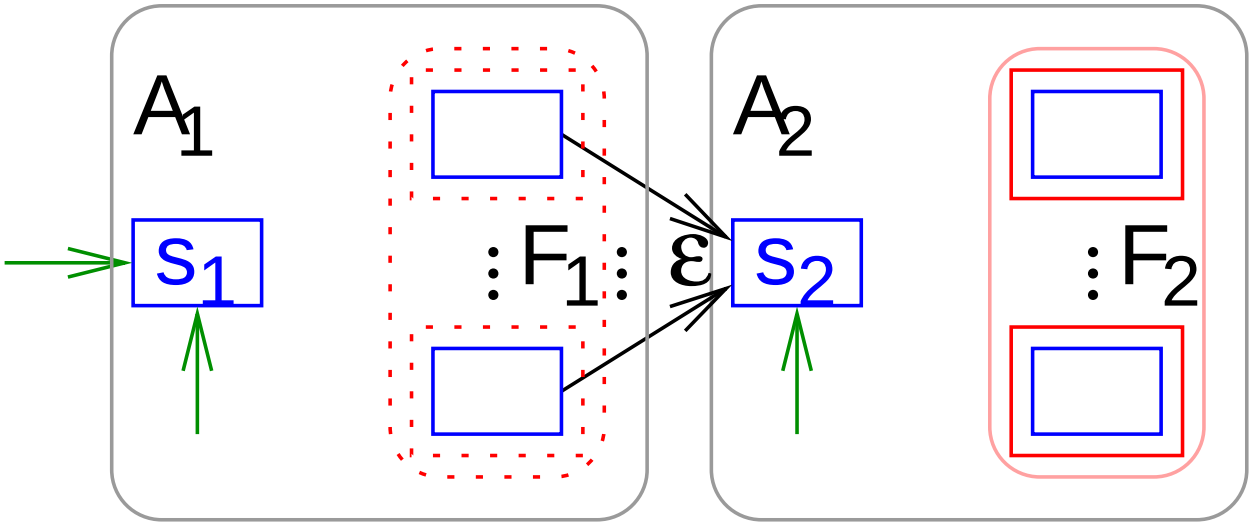
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ mit $L(A_2) = L_2$

sowie $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s_1, F_2)$

δ verhält sich wie $\delta_{1/2}$ für $Q_{1/2}$

spontane Übergange von F_1 nach s_2.



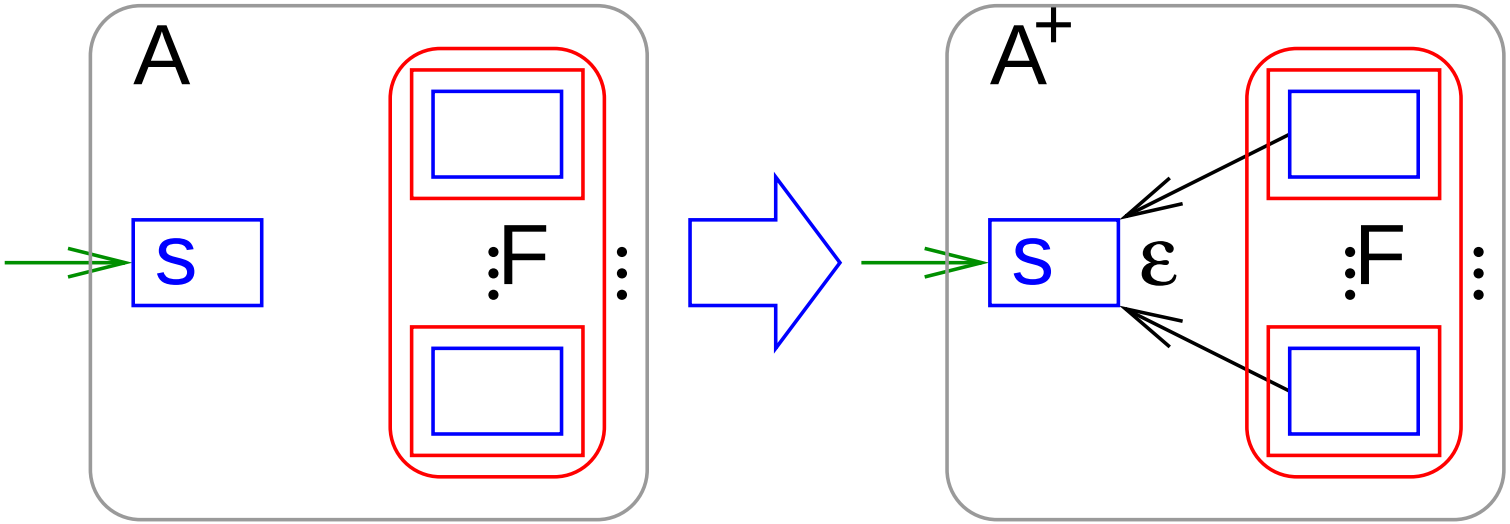
Positive Hülle $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $L(A) = L$

$A^+ := (Q, \Sigma, \delta^+, s, F)$

δ^+ verhält sich wie δ

spontane Übergange $f \rightarrow s \forall f \in F$.



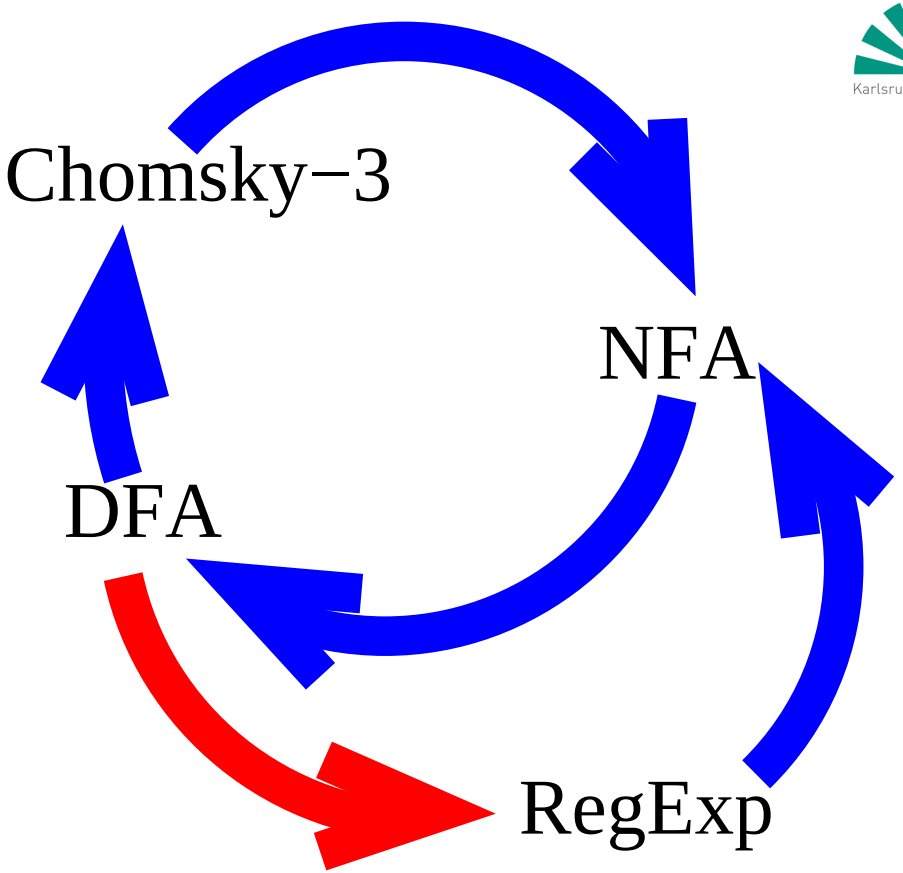
εNFA $A \rightsquigarrow$NFA $\bar{A}$

Beweisidee:

ersetze mit ε und einem Buchstaben beschriftete Pfade in A durch explizite Übergänge in $\bar{A}$.

Vorsicht mit Endzuständen.

DFA→RegExp



Ziel:

- Kein „Sprachenzoo“
- reguläre Ausdrücke sind universelles Interface
- reverse engineering (vielleicht)

Beweis: geg: DFA $A = (\{1,\ldots,n\},\Sigma,\delta,s,F)$

ges: regulärer Ausdruck α mit $L(A) = L(\alpha)$.

Für $f \in F$ sei $L_f = \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(s,w) = f \right\}$.

Da $L(A) = \bigcup_{f \in F} L_f$, genügt es, einen RegExp für L_f zu finden.

geg: DFA $A_f = (\{1,\ldots,n\},\Sigma,\delta,s,\{f\})$

ges: regulärer Ausdruck α mit $L_f = L(A_f) = L(\alpha)$.

Sei $L_{ij} := L((\{1,\ldots,n\},\Sigma,\delta,i,\{j\}))$

Also insbesondere $L_{sf} = L_f$.

$L_{ij}^m := \left\{ w \in \Sigma^* : \exists \text{Abarbeitungspfad } i \overset{w}{\Rightarrow} j = iPj \text{ mit } P \in \{1,\ldots,m\}^* \right\}$

Beachte, dass $L_{ij} = L_{ij}^n$.

Wir konstruieren L_{ij}^m induktiv

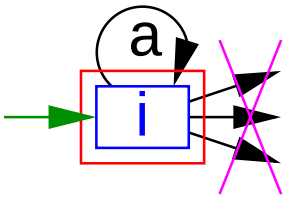
aus den regulären Ausdrücken für kleinere m.

$$L_{ij}^m := \left\{ w \in \Sigma^* : \exists \text{Abarbeitungspfad } i \stackrel{w}{\Rightarrow} j = iPj \text{ mit } P \in \{1,\ldots,m\}^* \right\}$$

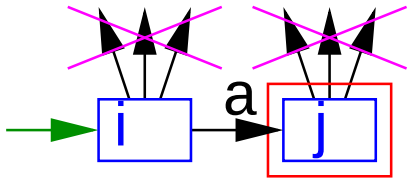
geg: reguläre Ausdrücke α_{ij}^k, $k < m$ mit $L(\alpha_{ij}^k) = L_{ij}^k$

ges: α_{ij}^m mit $L(\alpha_{ij}^m) = L_{ij}^m$

Fall $m = 0, i = j$**:** $\alpha_{ii}^0 = \bigcup_{a \in \Sigma : \delta(i,a) = i} a \cup \varepsilon$

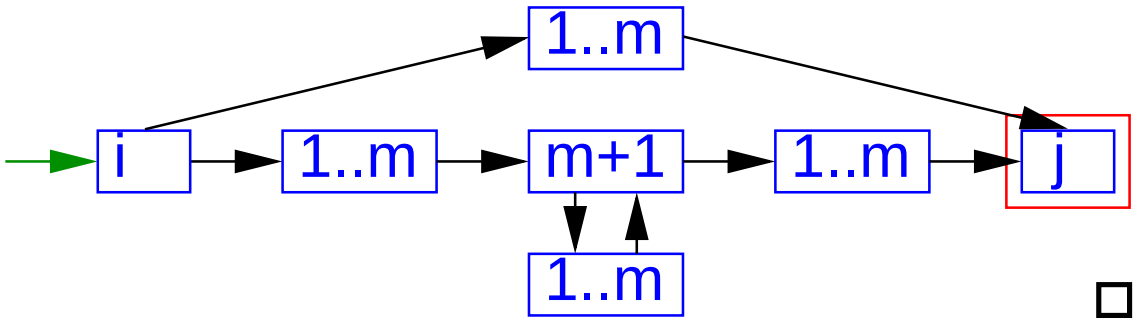


Fall $m = 0, i \neq j$**:** $\alpha_{ij}^0 = \bigcup_{a \in \Sigma : \delta(i,a) = j} a$



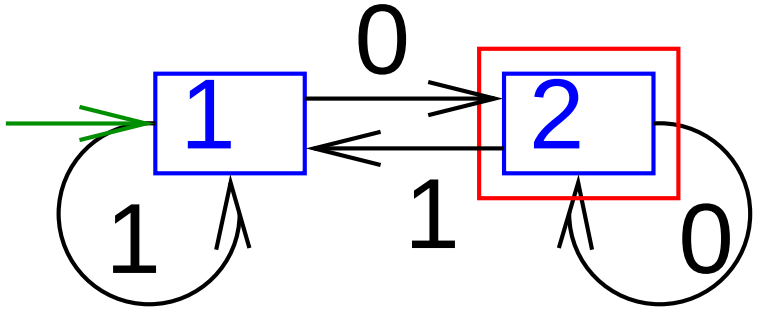
Fall $m \rightsquigarrow m+1$**:**

$$\alpha_{ij}^{m+1} = \alpha_{ij}^m \cup \alpha_{i,m+1}^m \cdot (\alpha_{m+1,m+1}^m)^* \cdot \alpha_{m+1,j}^m$$



□

Beispiel



$$\alpha_{11}^0 = 1 \cup \varepsilon \qquad \alpha_{22}^0 = 0 \cup \varepsilon \qquad \alpha_{12}^0 = 0 \qquad \alpha_{21}^0 = 1$$

$$\begin{aligned}\alpha_{12}^1 &= \alpha_{12}^0 \cup \alpha_{11}^0 \cdot (\alpha_{11}^0)^* \cdot \alpha_{12}^0 \\ &= 0 \cup (1 \cup \varepsilon) \cdot (1 \cup \varepsilon)^* \cdot 0 \\ &= 1^*0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\alpha_{22}^1 &= \alpha_{22}^0 \cup \alpha_{21}^0 \cdot (\alpha_{11}^0)^* \cdot \alpha_{12}^0 \\ &= 0 \cup \varepsilon \cup 1 \cdot (1 \cup \varepsilon)^* \cdot 0 \\ &= 1^*0 \cup \varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{12}^2 &= \alpha_{12}^1 \cup \alpha_{12}^1 \cdot (\alpha_{22}^1)^* \cdot \alpha_{22}^1 \\ &= 1^*0 \cup 1^*0 \cdot (1^*0 \cup \varepsilon)^* \cdot (1^*0 \cup \varepsilon) \\ &= 1^*0(1^*0)^*\end{aligned}$$

$L(\alpha_{12}^2) = L_{12}^2 = L_{12} = L_2$, wobei $F = \{2\}$.

1.2.4 Das Pumping Lemma (für reguläre Sprachen)

L regulär

$$\longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L : |w| > n$$

$$\longrightarrow \exists u, v, x : w = uvx \wedge$$

1. $|v| \geq 1 \wedge$
2. $|uv| \leq n \wedge$
3. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \in L$

In Worten:

Hinreichend lange Worte einer regulären Sprache lassen sich durch Wiederholung eines nichttrivialen Mittelteiles „aufpumpen“.

Beweis Pumping Lemma

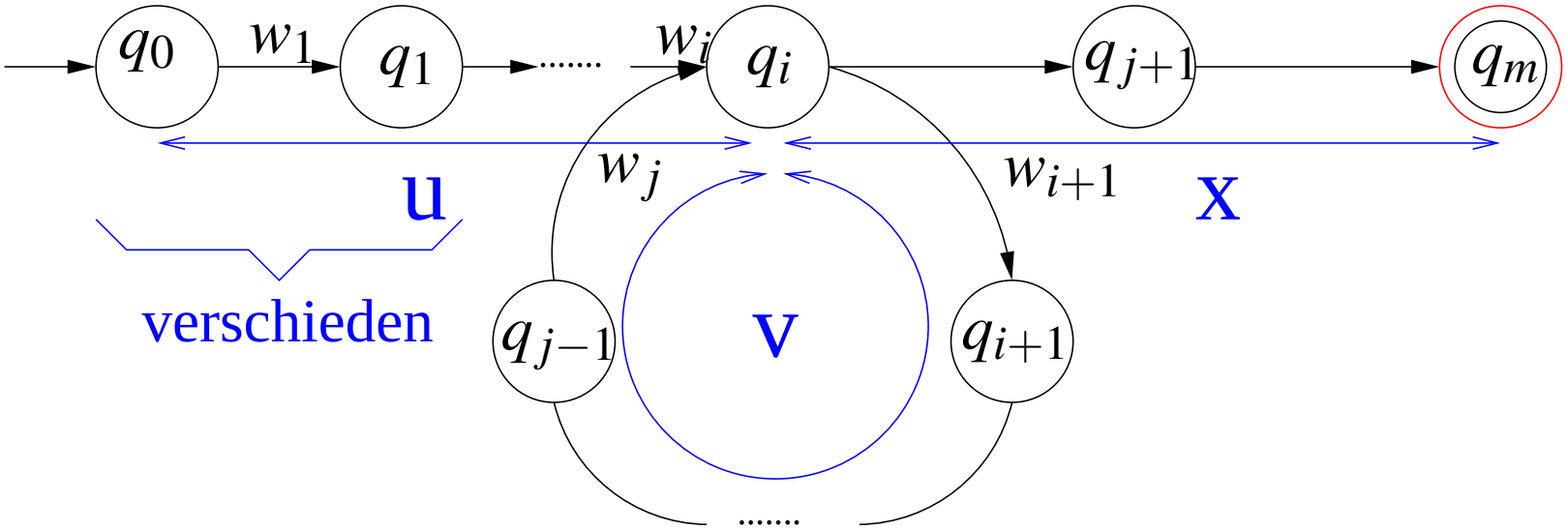
L regulär $\longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in \Sigma^* : |w| > n \longrightarrow \exists u, v, x :$

$w = uvx \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i x \in L$

Beweis: Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA mit $L(A) = L$.

Sei $n = |Q|$ und $w \in L$ mit $|w| = m > n$ beliebig.

Seien $q_0, \ldots, q_m$ die durchlaufenen Zustände.



$(\exists i < j \leq n : q_i = q_j) \longrightarrow |v| \geq 1, |uv| \leq n, uv^i x$ wird ebenfalls akzeptiert

Beispiel: $L = \{a^k b^k : k \in \mathbb{N}\}$

Annahme L regulär.

Sei n der Wert aus dem Pumping Lemma und betrachte

$w = a^n b^n = uvx$ so dass laut Pumping Lemma $ux \in L$.

$|uv| \leq n, |v| \geq 1 \longrightarrow v = a^\ell$ für ein $\ell \geq 1$.

$ux = a^{n-\ell} b^n \in L$.

Widerspruch. ■

Beispiel: Wohlgeformte Klammerausdrücke $L_{()}$

Annahme L regulär.

Sei n der Wert aus dem Pumping Lemma und betrachte

$w = (^n)^n = uvx$ so dass laut Pumping Lemma

$ux \in L_{()}$ sowie $|v| > 1$ und $|uv| \leq n$.

Dann ist $v = (^i$

und $ux = (^{n-i})^n \notin L_{()}$ Widerspruch.

$L = \{0^p : p \text{ ist Primzahl}\}$

Annahme L regulär.

Sei n der Wert aus dem Pumping Lemma.

Sei $p \geq n+2$ Primzahl. ($\exists$ unendlich viele Primzahlen)

$\longrightarrow 0^p \in L = uvw, |v| \geq 1, |uw| \geq 2.$

Pumping-Lemma: $uv^{|uw|}w \in L$.

$\longrightarrow |uw| + |uw| \cdot |v| = |uw|(1+|v|)$ ist Primzahl.

Zwei nichttriviale Faktoren $|uw| \geq 2$ und $(1+|v|) \geq 2$.

Widerspruch. ■

Das Pumping-Lemma ist

keine hinreichende Bedingung für Regulärität

Beispiel: $L = \{c^m a^\ell b^\ell : m, \ell \geq 0\} \cup \{a\}^* \cdot \{b\}^*$ ist nicht regulär,

aber

Sei n (sogar) beliebig, $w \in L$ beliebig mit $|w| \geq n$.

Fall $w \in a^* b^*$**:** Kein Problem.

Fall $w = a^m a^\ell b^\ell$**,** $m \geq 1$**:**

Schreibe $w = \underbrace{\varepsilon}_{u} \underbrace{c}_{v} \underbrace{c^{m-1} a^\ell b^\ell}_{x}$

1. $|v| = 1 \geq 1$
2. $|uv| = 1 \leq n$
3. $uv^i x = c^{m-1+i} a^\ell b^\ell \in L$

1.2.5 Äquivalenzrelationen und Minimalautomaten

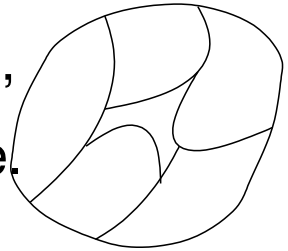
Idee: arbeite direkt mit L ohne Bezug zu einem konkreten Automaten.

Zur Erinnerung: Äquivalenzrelationen

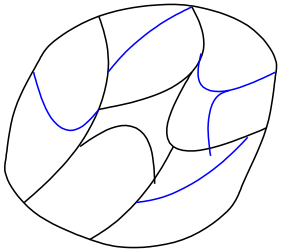
Eine Relation $R \subseteq Y \times Y$ heisst Äquivalenzrelationen gdw. sie:

- ☐ reflexiv $\forall x : xRx$
- ☐ transitiv $\forall xyz : xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz$
- ☐ symmetrisch ist. $\forall xy : xRy \longrightarrow yRx$

Äquivalenzklasse: $[x] = \{y : xRy\}$. Äq.-Klassen sind gleich oder disjunkt und induzieren eine Partitionierung von Y, d.h., jedes Element von Y gehört zu genau einer Äq.-Klasse.



Index: index(R):= $|\text{Äquivalenzklassen}| = |\{[x] : x \in Y\}|$



Verfeinerung: R verfeinert R' gdw $R \subseteq R'$

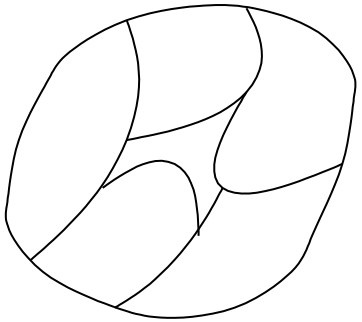
Lemma: R verfeinert $R' \longrightarrow \forall$ Äquivalenzklassen $[x]_R : [x]_R \subseteq [x]_{R'}$

Beweis:

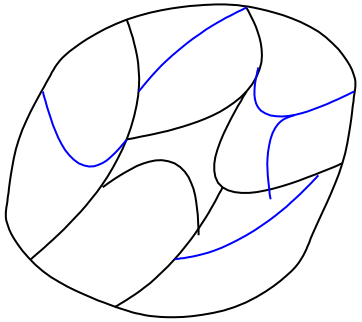
$$y \in [x]_R \Leftrightarrow (y,x) \in R$$

$$\xrightarrow{R \subseteq R'} (y,x) \in R'$$

$$\Leftrightarrow y \in [x]_{R'}$$



Korollar: R verfeinert $R' \longrightarrow \text{index}(R) \geq \text{index}(R')$



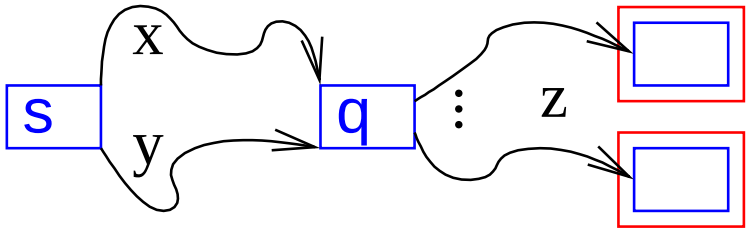
Nerode Relation

Zur Sprache L ist die Nerode Relation

$$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$$

Idee: Äquivalenzklassen entsprechen Zuständen.

Wieso? Genauer!



DFAs induzieren Äquivalenzrelationen

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ DFA mit $L(M) = L$.

$R_M := \left\{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y)\right\}$.

Äquivalenzrelation! Eine Äquivalenzklasse pro

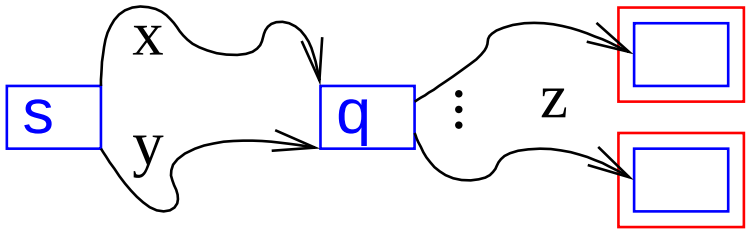
(von s erreichbarem) Zustand.

Lemma 1: R_M verfeinert die Neroderelation $R_L =$

$$\{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$$

Beweisskizze: z.Z.

$$\forall (x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y) \longrightarrow \forall z : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$



Unendlicher Index der Neroderelation

Beobachtung: index$(R_L) = \infty \longrightarrow L$ ist nicht regulär.

Beweis: Annahme L ist regulär.

$\longrightarrow \exists$ DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F) : L(M) = L$.

$\longrightarrow R_M$ verfeinert R_L.

$\longrightarrow |Q| \geq \text{index}(R_M) \geq \text{index}(R_L) = \infty$.

Widerspruch

Ab jetzt: index$(R_L) < \infty$.

Äquivalenzklassenautomat

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

Idee: wenn die Äquivalenzklassen $[w_1], \ldots, [w_k]$ von R_L zu den Zuständen eines DFA $M_\equiv$ korrespondieren, so ist dieser wegen Lemma 1 DER zustandsminimale Automat für L.

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$ mit
$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ und
$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Lemma: $\delta_\equiv$ ist wohldefiniert
Lemma: $\hat{\delta}_\equiv([\varepsilon], w) = [w]$
Lemma: $L(M_\equiv) = L$

Äquivalenzklassenautomat

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_{\equiv} := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_{\equiv}, [\varepsilon], F_{\equiv})$ mit

$F_{\equiv} := \{[w] : w \in L\}$ und

$\delta_{\equiv}([w], a) := [wa]$.

Lemma: $\delta_{\equiv}$ ist wohldefiniert

Also $xR_Ly \longrightarrow \forall a \in \Sigma : xaR_Lya$ *Rechtsinvarianz*

$xR_Ly \longrightarrow \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ insbesondere

$\longrightarrow \forall az \in \Sigma^* : x(az) \in L \Leftrightarrow y(az) \in L$

$\Leftrightarrow \forall a \in \Sigma : \forall z \in \Sigma^* : (xa)z \in L \Leftrightarrow (ya)z \in L$

$\longrightarrow \forall a \in \Sigma : xaR_Lya$ □

Äquivalenzklassenautomat

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_{\equiv} := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_{\equiv}, [\varepsilon], F_{\equiv})$ mit

$F_{\equiv} := \{[w] : w \in L\}$ und

$\delta_{\equiv}([w], a) := [wa]$.

Lemma: $\hat{\delta}_{\equiv}([x], y) = [xy]$

Induktion über $|y|$:

$\hat{\delta}_{\equiv}([x], \varepsilon) = [x]$.

$\hat{\delta}_{\equiv}([x], aw) \overset{\text{Def.}\hat{\delta}_{\equiv}}{=} \hat{\delta}_{\equiv}(\delta_{\equiv}([x], a), w) \overset{\text{Def.}\delta_{\equiv}}{=} \delta_{\equiv}([xa], w) \overset{IV}{=} [xaw]$. □

Äquivalenzklassenautomat: akzeptiert L

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$ mit

$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ und

$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Lemma: $L(M_\equiv) = L$.

$w \in L(M_\equiv)$

$\Leftrightarrow \hat{\delta}_\equiv([\varepsilon], w) \in \{[w] : w \in L\}$ Def. $M_\equiv$

$\Leftrightarrow [w] \in \{[w] : w \in L\}$ voriges Lemma

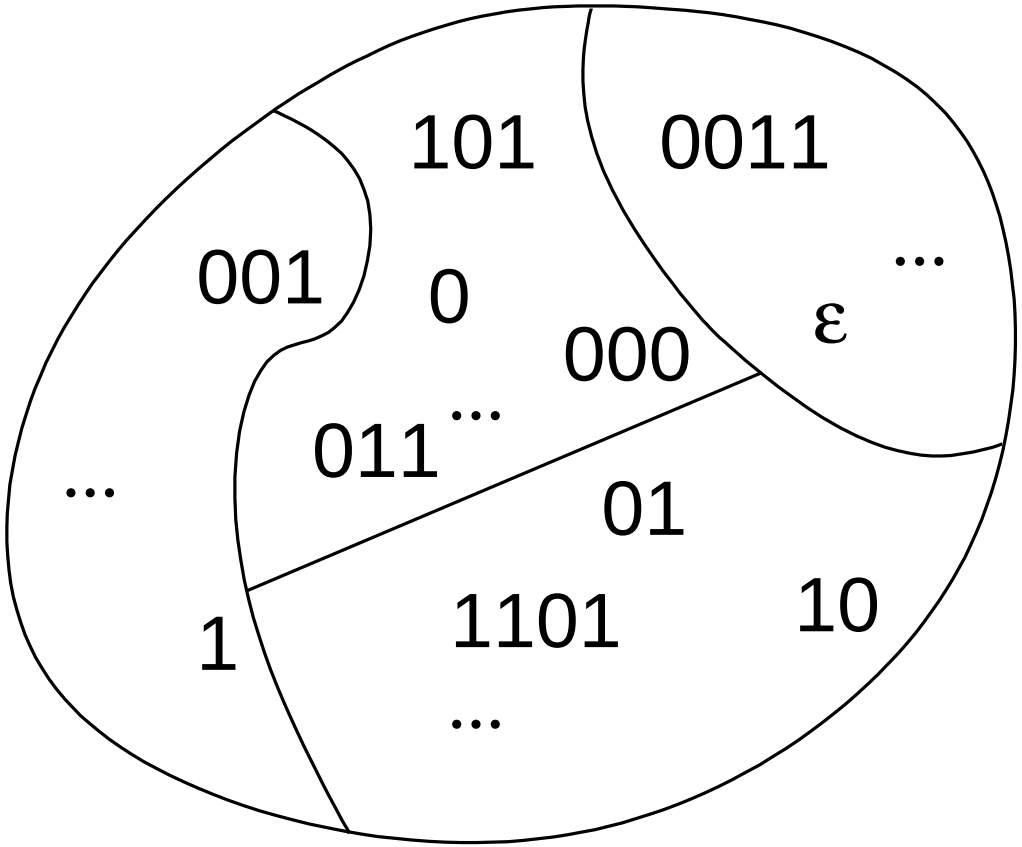
$\Leftrightarrow w \in L$. Äq.Klassen sind ganz oder garnicht in L

$([w] \in \{[w] : w \in L\} \longrightarrow \exists x \in L : [x] = [w] \longrightarrow xR_Lw \longrightarrow \forall z :$

$xz \in L \Leftrightarrow wz \in L \longrightarrow x\varepsilon \in L \Leftrightarrow w\varepsilon \in L)$

Beispiel

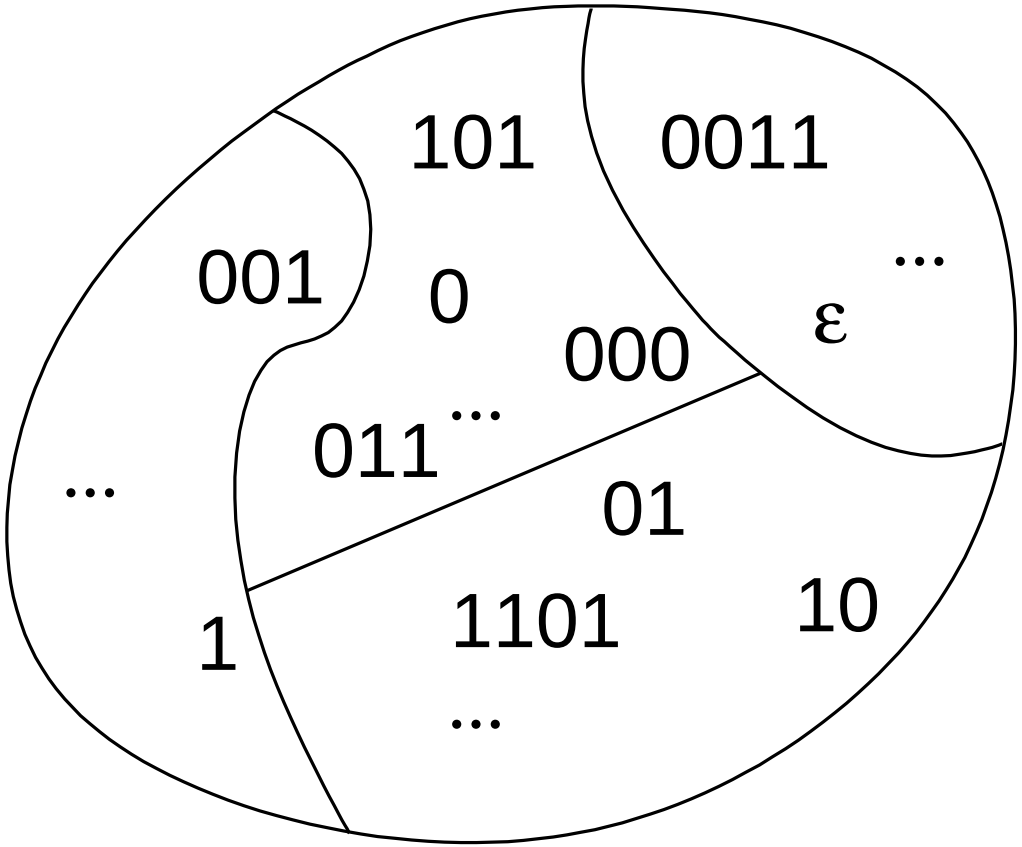
$L \subseteq \{0,1\}^*$ Sprache aller Wörter mit gerader Zahl an Einsen und gerader Zahl an Nullen



Äquivalenzklassen?

Beispiel

$L \subseteq \{0,1\}^*$ Sprache aller Wörter mit gerader Zahl an Einsen und gerader Zahl an Nullen

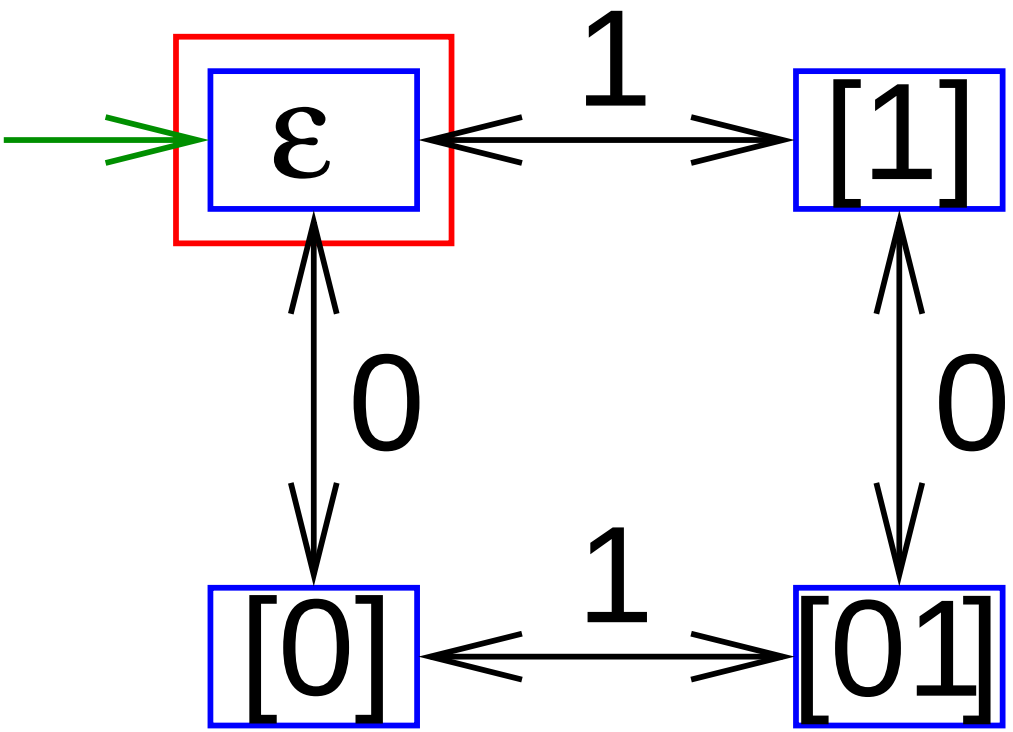


Äquivalenzklassen:

$[\varepsilon], [0], [1], [01]$

Beispiel

$L \subseteq \{0,1\}^*$ Sprache aller Wörter mit gerader Zahl an Einsen und gerader Zahl an Nullen



Satz von Nerode

Sei

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$.

L nicht regulär $\longrightarrow \text{index}(R_L) = \infty$

L regulär $\longrightarrow$ Sei

$M_{\equiv} := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_{\equiv}, [\varepsilon], F_{\equiv})$, und

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ beliebiger DFA mit $L(M) = L$.

Es gilt $L(M_{\equiv}) = L$ und R_M ist Verfeinerung von R_L.

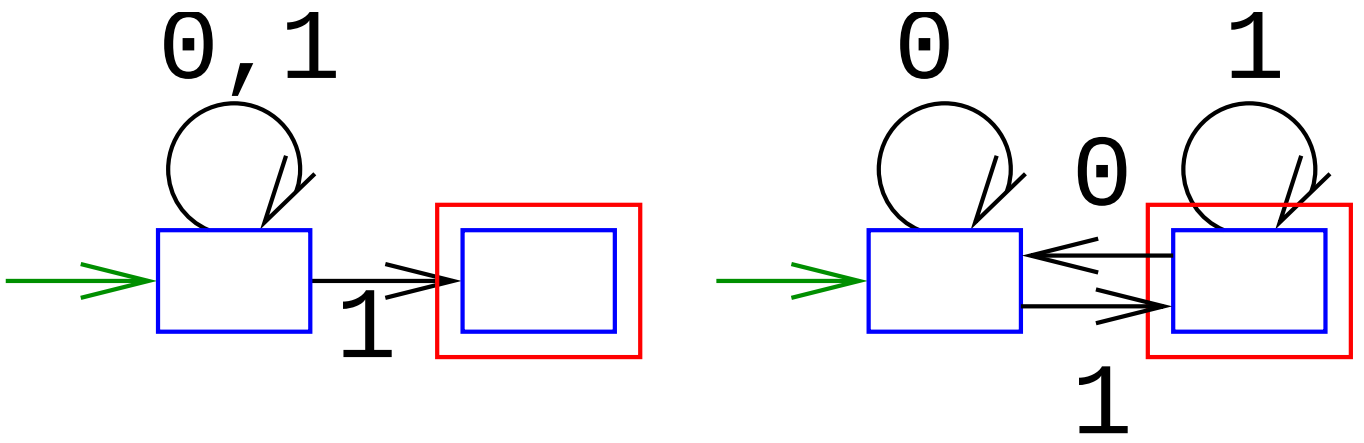
Korollar:

Alle zustandsminimalen Automaten für L sind isomorph zu $M_{\equiv}$.

(gleich bis auf Zustandsumbenennung)

Gegenbeispiel NFA

Es gibt strukturell unterschiedliche zustandsminimale NFAs für $(0 \cup 1)^* 1$.



Übung: Übergangsfunktionen hinschreiben

Konstruktion

eines zustandsminimalen Automaten

Vorverarbeitung

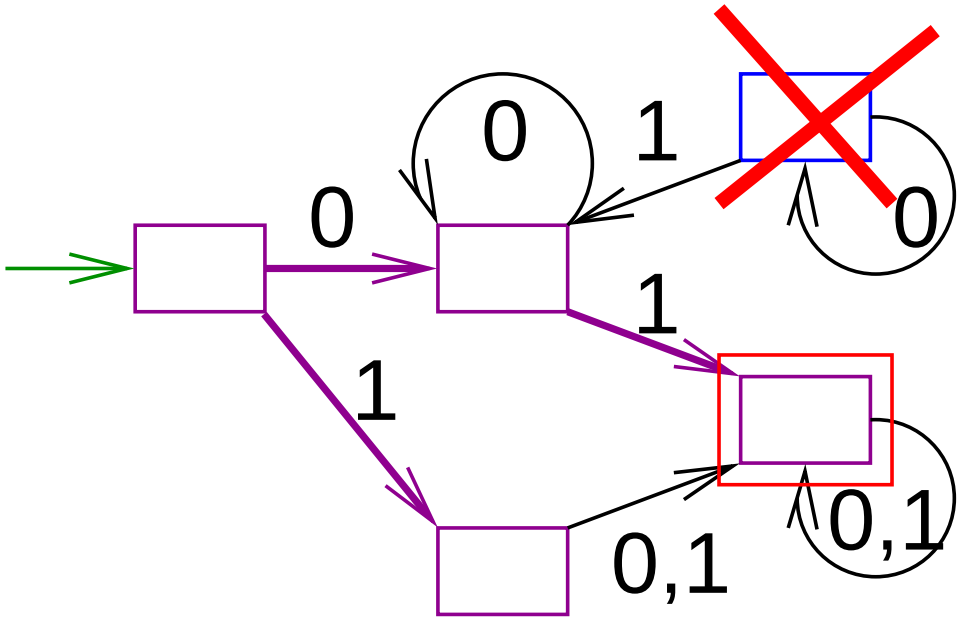
Entferne Zustände, die von s aus nicht erreichbar sind.

Algorithmus: Tiefensuche im Graph G_A von s aus.

Markiere alle erreichten Zustände.

Entferne nicht erreichte Zustände.

Vorverarbeitung — Beispiel



Kante im Tiefensuchbaum

erreichter Zustand

Äquivalente Zustände

Idee: betrachete DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ (ohne nichterr. Zustände)

M nicht zustandsminimal $\longrightarrow$

R_M verfeinert R_L $\longrightarrow$

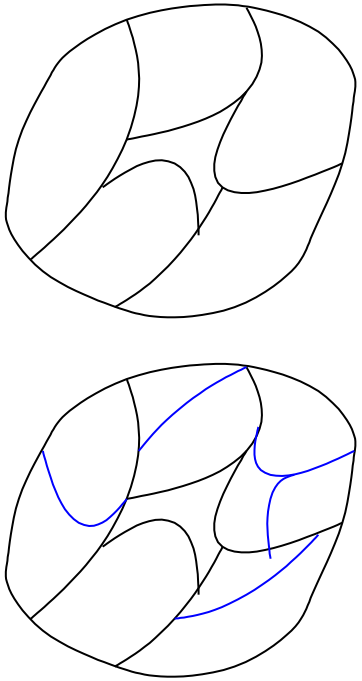
$\exists q \neq r \in Q$: Äq-Klasse$(q) \dot{\cup}$ Äq-Klasse$(r) \subseteq K$

für eine Äq-Klasse K von R_L

solche q, r nennen wir äquivalent, $q \equiv r$.

Insbesondere:

$\forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r, w) \in F$



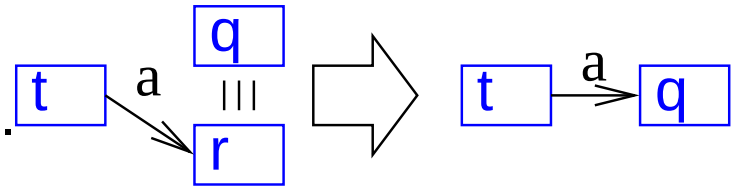
Entfernen äquivalenter Zustände

Betrachte $q \neq r \in Q : q \equiv r$ mit $r \neq s$

Entferne r:

$M' := (Q \setminus \{r\}, \Sigma, \delta', s, F \setminus \{r\}))$ mit

$$\delta'(t,a) := \begin{cases} q & \text{falls } \delta(t,a) = r \\ \delta(t,a) & \text{sonst} \end{cases}$$



Lemma: $L(M') = L$

Beweis: Übung

Zustandsminimierung

Erster Versuch:

Function minDFA(M)

remove states not reachable from s

while $\exists q, r \in Q : q \equiv r \wedge q \neq r \wedge r \neq s$ **do**

remove r from M

return M

Problem: wie findet man äquivalente Zustände?

$q \equiv r$ gdw. $\forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

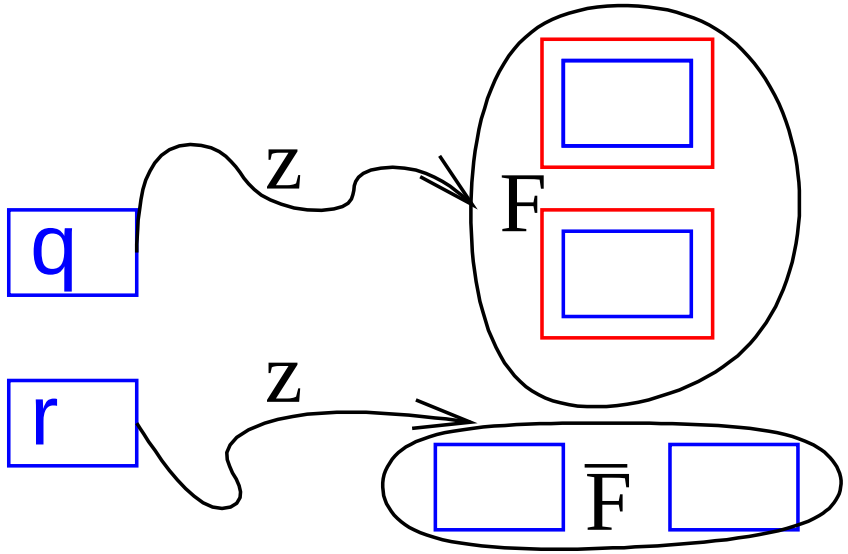
Allquantifizierung über unendliche Menge!

Nichtäquivalenz von Zuständen

$q \equiv r$ gdw. $\forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

$q \not\equiv r$ gdw. $\exists z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \not\Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

z bezeugt Nichtäquivalenz.



Problem: finde Zeugen für Nichtäquivalenz

Kürzeste Zeugen für Nichtäquivalenz

$\forall q \in F, r \notin F$: ε bezeugt $q \not\equiv r$.

Sei $w = aw'$ kürzester Zeuge für $q \not\equiv r$.

Beobachtung: w' ist Zeuge für $q' := \delta(q,a) \not\equiv \delta(r,a) =: r'$

Lemma: w' ist kürzester Zeuge für $q' \not\equiv r'$

Widerspruchsbeweis: Annahme:

w'' ist kürzerer Zeuge für $q' \not\equiv r'$

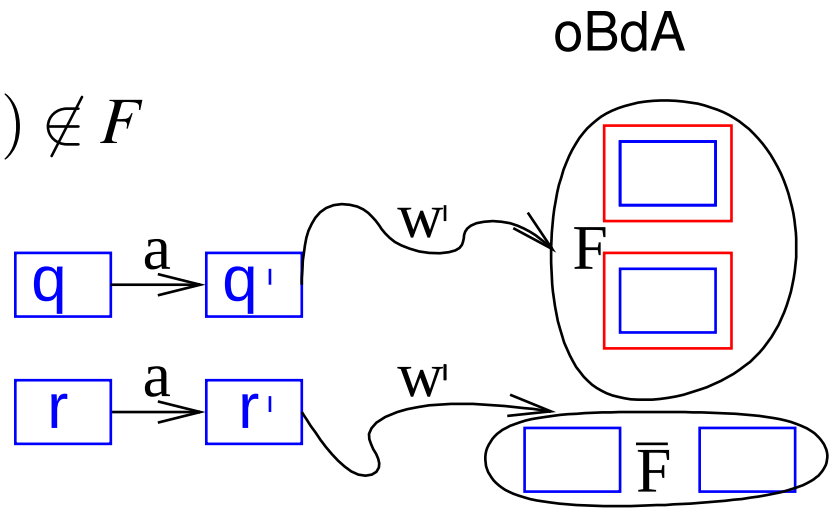
$\longrightarrow \hat{\delta}(q', w'') \in F \wedge \hat{\delta}(r', w'') \notin F$

$\longrightarrow \hat{\delta}(\delta(q,a), w'') \in F \wedge \hat{\delta}(\delta(r,a), w'') \notin F$

$\longrightarrow \hat{\delta}(q, aw'') \in F \wedge \hat{\delta}(r, aw'') \notin F$

$\longrightarrow aw''$ ist kürzerer Zeuge für $q \not\equiv r$

Widerspruch



Kürzeste Zeugen für Nichtäquivalenz

ε bezeugt $q \not\equiv r$ falls $q \in F, r \notin F$.

Sei $w = aw'$ kürzester Zeuge für $q \not\equiv r$.

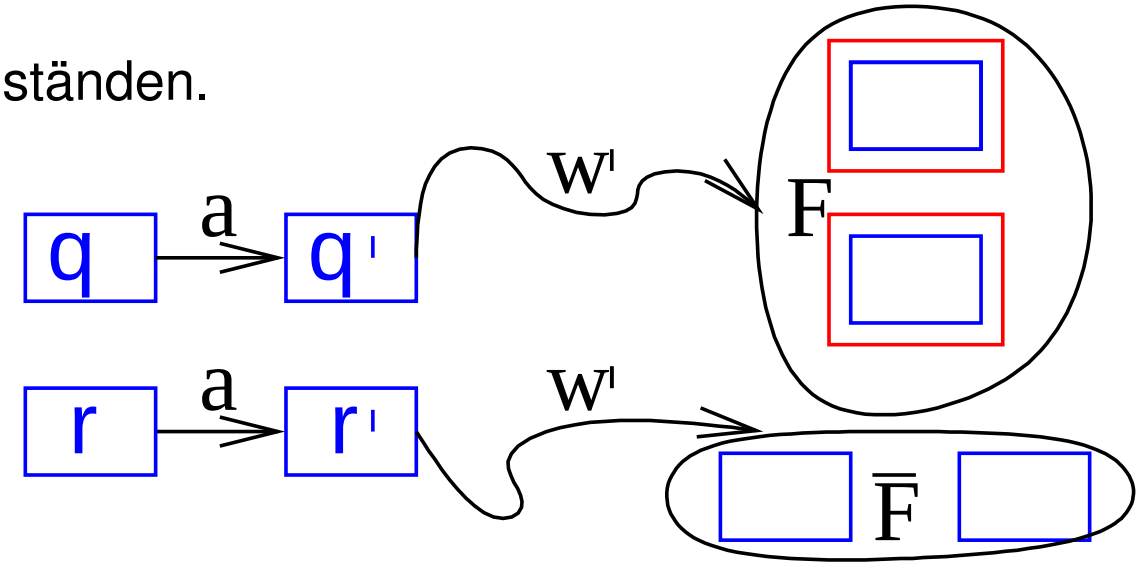
Lemma: w' ist kürzester Zeuge für $q' := \delta(q,a) \not\equiv \delta(r,a) =: r'$

Folgerung:

kürzeste Zeugen lassen sich systematisch und effizient erzeugen.

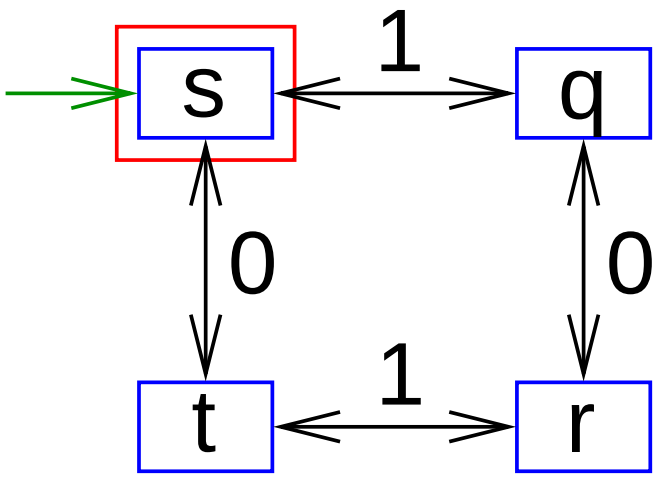
$\rightsquigarrow$ alle Nichtäquivalenzen

$\rightsquigarrow$ Äquivalenzklassen von Zuständen.



Beispiel

$L \subseteq \{0,1\}^*$ Sprache aller Wörter mit gerader Zahl an Einsen und gerader Zahl an Nullen



$0 = 0\varepsilon$ ist kürzester Zeuge für $t \not\equiv r$.

$\rightsquigarrow \varepsilon$ ist kürzester Zeuge für $s = \delta(t,0) \not\equiv \delta(r,0) = q$.

Sei $w = aw'$ kürzester Zeuge für $q \not\equiv r$.

Lemma: w' ist kürzester Zeuge für $q' := \delta(q,a) \not\equiv \delta(r,a) =: r'$

Sei N die Menge aller nichtäquivalenten Zustandspaare für die es Zeugen der Länge $\leq k$ gibt.

Für welche Zustandspaare $\{q,r\}$ gibt es Zeugen der Länge $k+1$?

Lemma: $\{\{q,r\} \subseteq Q : \exists a \in \Sigma : \{\delta(q,a), \delta(r,a)\} \in N\}$

Ein Einfacher Algorithmus

$N := \emptyset$ // marked pairs

$N' := \{\{q,r\} \subseteq Q : q \in F \not\Leftrightarrow r \in F\}$ // pairs to be marked next

while $N' \neq \emptyset$ **do**

$N := N \cup N'$

$N' := \{\{q,r\} \subseteq Q : \exists a \in \Sigma : \{\delta(q,a), \delta(r,a)\} \in N\} \setminus N$

Gesamtzeit: $\mathcal{O}\left(|\Sigma| \cdot |Q|^3\right)$

Initialisierung: $\mathcal{O}\left(|Q|^2\right)$

Ein Schleifendurchlauf: $\mathcal{O}\left(|\Sigma| \cdot |Q|^2\right)$

Wieviel Schleifendurchläufe? Sicherlich $\leq |Q|^2$.

Genauere Betrachtung: $\leq |Q|$ Schleifenduchläufe

Zustandsminimierung in Zeit $\mathcal{O}(|\Sigma| \cdot |Q| \log |Q|)$

[Hopcroft 1971]. Geschickte Datenstrukturen.

Leichte Vereinfachung:

[Blum, Minimization of finite automata in $O(n \log n)$ time, Inf. Proc. Letters, 1996.]

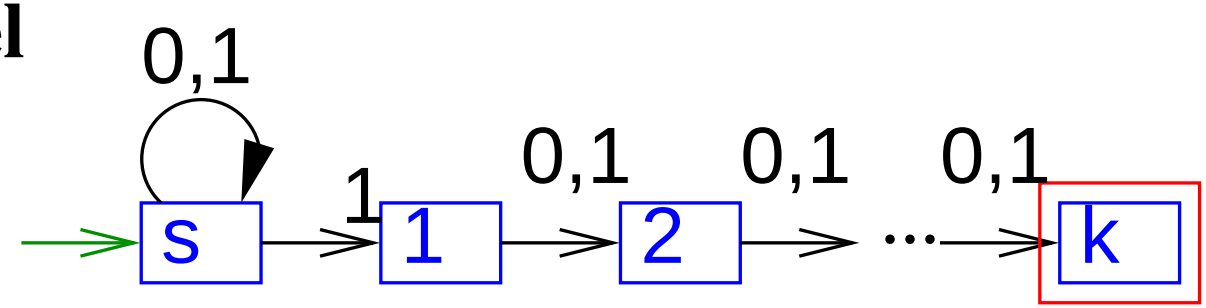
Wieso Zustandsminimierung

- Minimiert Platz für Zustandsübergangstabelle
- Minimalautomat eindeutig $\rightsquigarrow$ wir lernen etwas über die akzeptierte Sprache.

Aber, wenn δ als Schaltkreis oder Programm repräsentiert ist, wollen wir deren Größe und Zeitaufwand optimieren.

Im allgemeinen schwierig $\rightsquigarrow$ aktives Forschungsgebiet

Beispiel

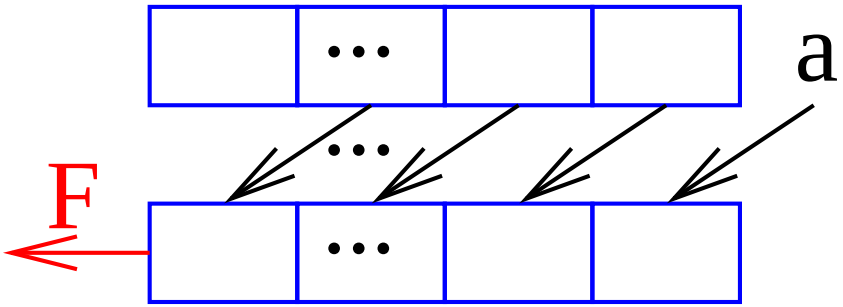


$$L = \{0,1\}^* 1 \{0,1\}^{k-1}$$

der Minimalautomat hat 2^k Zustände.

$$(\{0,\ldots,2^k-1\}, \{0,1\}, \delta, 0, F)$$

$$\delta(q,a) = 2q + a \bmod 2^k,\ q \in F \Leftrightarrow q[k-1] = 1$$



Nachweis von Nichtregularität

- Pumping Lemma:
  - $+$: Leicht handhabbar
  - $-$: Nur notwendige Bedingung
- Nerode Relation
  - $+$: Notewendige und hinreichende Bedingung $\text{index}(R_L) = \infty$
  - $-$: Etwas unhandlicher

Nerode Relation

Beispiel: $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$

Behauptung: $\forall k > 1, j \neq k > 11 : [a^k b] \neq [a^j b]$

$[a^k b] = \{a^k b, a^{k+1} bb, \ldots\} = \{a^{k+i} b^{i+1}\}$

also immer $k-1$ mehr a's als b's.

Folglich sind $[a^k b]$ und $[a^j b]$ disjunkt $\square$

Nerode Relation

Beispiel: $L = \{c^m a^\ell b^\ell : m, \ell \geq 0\} \cup \{a,b\}^*$

Behauptung: $\forall k > 1, j \neq k > 1 : [ca^k b] \neq [ca^j b]$

$[ca^k b] = \{c^m a^{k+i} b^{1+i} : m \geq 0, i \geq 1\}$

also immer $k-1$ mehr a's als b's.

Folglich sind $[ca^k b]$ und $[ca^j b]$ disjunkt $\square$

1.2.6 Abschlusseigenschaften

Seien L, L' reguläre Sprachen.

Dann sind folgende Sprachen ebenfalls regulär:

$L \cup L', L^*, L \cdot L'$: nach Definition reg. Ausdrücke.

$\bar{L} := \Sigma^* \setminus L$: Betrachte DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $L(A) = L$.
Sei $\bar{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, Q \setminus F)$. Dann gilt $L(\bar{A}) = \bar{L}$.

$L \cap L' = \overline{\bar{L} \cup \bar{L}'}$ (De Morgan)

$L \setminus L' = L \cap \bar{L}'$

L^R: (Spiegelung) Übung. Hinweis: Induktion über reguläre Ausdrücke.

Produktautomat

Konstruktion eines DFA für Mengenoperationen

L und L' seien reguläre Sprachen definiert durch DFAs

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$,

$A' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$.

Idee: Ein Automat $A_\times$ emuliert das Verhalten von A und A'.

Produktautomat: $A_\times := (Q \times Q', \Sigma, \delta_\times, (s, s'), F_\times)$ mit

$\delta_\times((q, q'), a) = (\delta(q, a), \delta(q', a))$

Definiere F je nach Mengenoperation:

$L \cup L'$: $F_\times := Q \times F' \cup F \times Q'$

$L \cap L'$ $F_\times := F \times F'$

...

1.2.7 Entscheidbarkeit einfacher Eigenschaften endlicher Automaten

Wortproblem

$w \in L$?

Wandle in DFA A um.

Simuliere A bei Eingabe von w.

Endzustand erreicht?

Linearzeit falls DFA bekannt!

Leerheitsproblem

$L = \emptyset$?

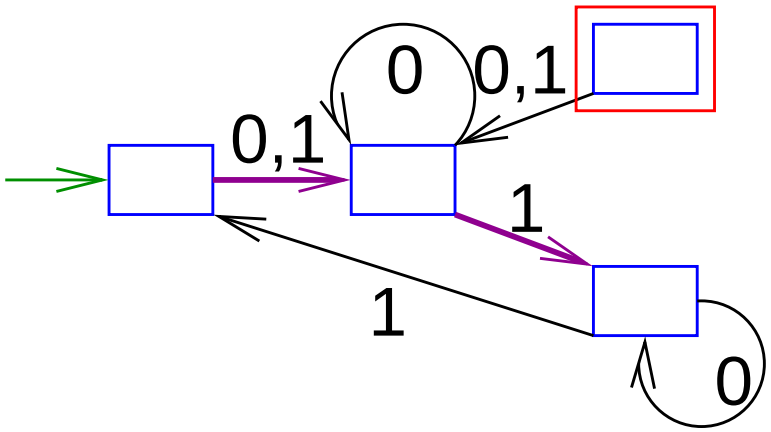
Representation DFA oder NFA A:

$L = \emptyset \Leftrightarrow \neg\exists f \in F : f$ ist von s aus erreichbar

$\rightsquigarrow$ Tiefensuche, Linearzeit, auch für NFA.

Beispiel

$L(A) = \emptyset$



Kante im Tiefensuchbaum

Endlichkeitsproblem I — über Pumping Lemma

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma für L (Typ-3)

Behauptung: $|L(G)| = \infty \Leftrightarrow \exists z \in L(G) : n \leq |z| < 2n$

Beweis:

$z \in L(G), n \leq |z| < 2n \longrightarrow$ Pumpinglemma garantiert $|L| = \infty$.

Falls $|L(G)| = \infty$ betrachte $z \in L(G)$ mit minimalem $|z| \geq n$.

Annahme $|z| \geq 2n$.

$\overset{\text{Pumpinglemma}}{\longrightarrow} z = uvw,\ 1 \leq |v| \leq |uv| \leq n, uw \in L(G) \longrightarrow |uw| \geq n.$

Widerspruch zur Minimalität von $|z|$.

Endlichkeitsproblem II — Kreisdetektion

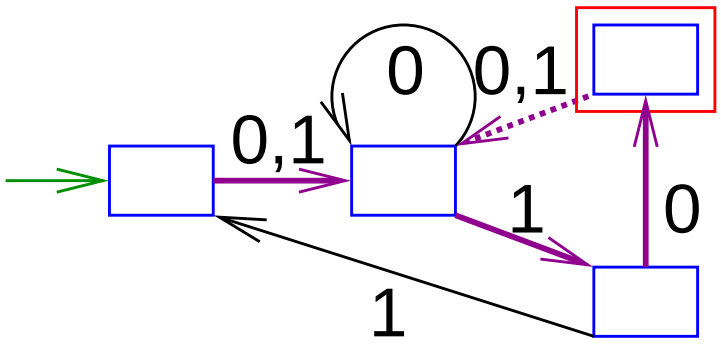
$|L(A)| = \infty$? $\Leftrightarrow \exists$ akzeptierender Pfad, der Kreis enthält.

OBdA: NFA mit $F = \{f\}$. Sei $G_A = (Q, E)$,

$E = \{(q,r) : \exists a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} : r \in \delta(q,a)\}$

1. Entferne Zustände, von denen aus f nicht erreichbar ist.
   Tiefensuche in $\bar{G}_a = (Q, \{(q,r) : (r,q) \in E\})$ von f.

2. Ist von s aus ein Kreis erreichbar? $\Leftrightarrow$
   Trifft Tiefensuche in G_A von s auf eine Rückwärtskante?



Kante im Tiefensuchbaum

Rückwärtskante im Tiefensuchbaum

Vollständigkeitsproblem

$L(A) = \Sigma^*$?

$\Leftrightarrow \neg\exists q \in Q \setminus F$: q ist von s aus erreichbar?

$\rightsquigarrow$ Tiefensuche, Linearzeit, nur für DFA!

(äquivalent: Leerheit von $\bar{L}$)

Vollständigkeit für NFA:

Umwandlung in DFA. Nichts deutlich besseres bekannt.

Äquivalenzproblem

L und L' seien reguläre Sprachen definiert durch DFAs A, A'.

Frage $L = L'$?

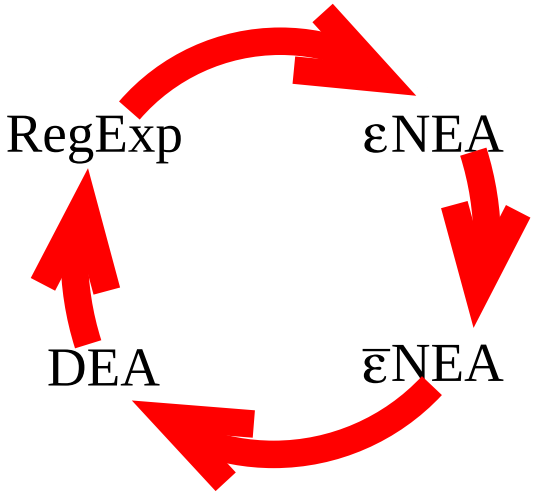
$\Leftrightarrow \neg\exists w : (w \in L \wedge w \notin L') \vee (w \notin L \wedge w \in L')$

$\Leftrightarrow \neg\exists w : (w \in L \wedge w \in \bar{L'}) \vee (w \in \bar{L} \wedge w \in L')$

$\Leftrightarrow (L \cap \bar{L'}) \cup (\bar{L} \cap L') = \emptyset$

z.B. via Produktautomat

Problem: langsam



Äquivalenz von DFAs

L und L' seien reguläre Sprachen definiert durch DFAs
$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F), A' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$.

Idee: der Minimalautomat ist „eindeutig“.

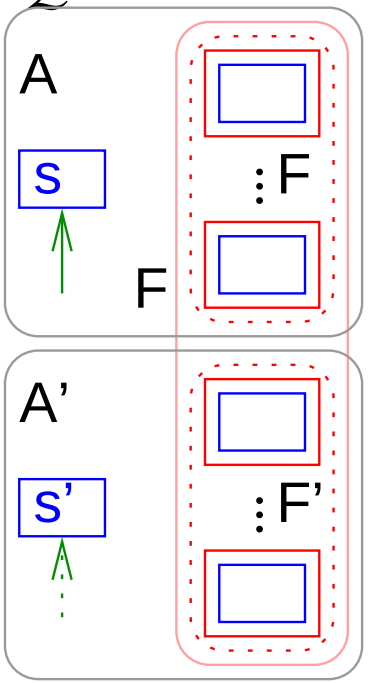
$\rightsquigarrow$ minimiere beide Automaten und prüfe auf „Gleichheit“.

Problem: Zustandsumbenennungen sind erlaubt. Die Komplexität des Isomorphietestes allgemeiner Graphen ist ein offenes Problem.

Äquivalenz von DFAs

L und L' seien reguläre Sprachen definiert durch DFAs
$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F), A' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$. ObdA $Q \cap Q' = \emptyset$.

Frage $L = L'$?



Betrachte $A_\cup := (Q \cup Q', \Sigma, \delta_\cup, s, F \cup F')$ mit

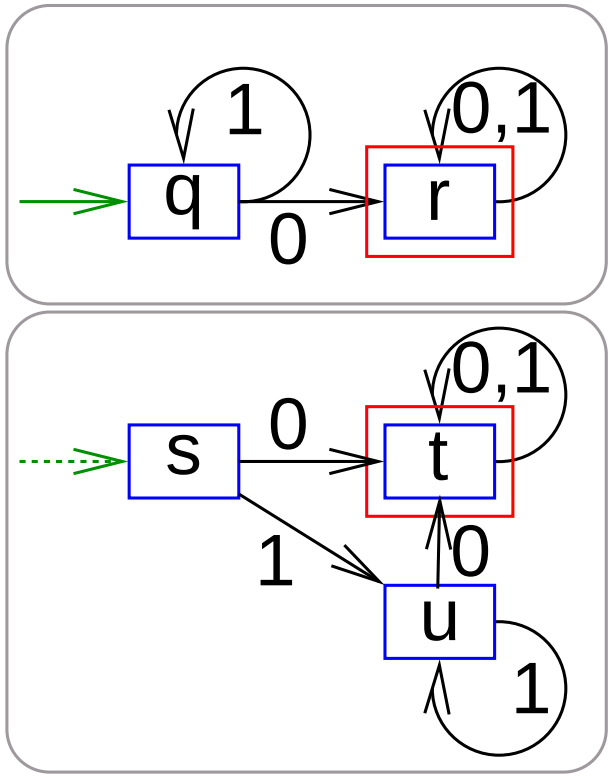
$$\delta_\cup(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{falls } q \in Q \\ \delta'(q,a) & \text{falls } q \in Q' \end{cases}$$

Bestimme Äquivalenzklassen der Zustände von $A_\cup$.

$L = L' \Leftrightarrow s \equiv s'$.

Beispiel

$L \subseteq \{0,1\}^*$ Sprache aller Wörter mit mindestens einer Null



Algorithmus zur Markierung aller inäquivalenter Zustandspaare liefert:

$\{q,r\}, \{q,t\}, \{s,r\}, \{s,t\}, \{u,r\}, \{u,t\}$

$\rightsquigarrow q \equiv s$

$\rightsquigarrow$ Beide Automaten sind äquivalent.

Zusammenfassung Endliche Automaten u. Reguläre Sprachen

- Einfaches Maschinenmodell
- Umfassend algorithmisch beherrschbar (Zustandsminimierung, Konvertierung mit regulären Ausdrücken,...)
- Akzeptierte Sprechen vollständig verstanden
- Nützliche Anwendungen: Textverarbeitung, Compiler, Hardware,...
- Konzept des Nichtdeterminismus