2 Berechenbarkeitstheorie

2.1 Intuitiver Berechenbarkeitsbegriff und Churchsche These

Berechenbarkeit Hauptergebnis

Sicherstes Rezept Nichtinformatiker zu vergraulen:

Eine hitzige Debatte über DIE richtige Programmiersprache

- Alle Programmiersprachen und Maschinenmodelle sind „gleich mächtig“
- In jedem Modell gibt es die gleichen nichtberechenbaren Probleme

2.2 Intuitiver Berechenbarkeitsbegriff

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sei (u.U. partielle) Funktion.

f ist berechenbar gdw.

$\exists$ Rechenverfahren(=Algorithmus) das f berechnet

Rechenverfahren $=$ Java-Programm (, ..., “geeignete” Programmiersprache)

Eingabe: $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$

Ausgabe: $f(x_1, \ldots, x_k)$

Programm stoppt nach endlich vielen Schritten falls $f(x_1, \ldots, x_k) \in$ Definitionsbereich von f.

Endlosschleife sonst.

Beispiel

input n

repeat

until false

berechnete die total undefinierte Funktion Ω

Beispiel

$$f_\pi(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ist Anfangsabschnitt der Dezimalbruchentwicklung von } \pi. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f_π ist berechenbar:

Benutze Langzahlarithmetik, und iteriere eine geeignete Näherungsformel “lange genug”.

Exkurs: einige Näherungen für π

Archimedes: Näherung über gleichseitige Vielecke.

Altindisch: 1682 von Leibniz wiederentdeckt

$$\pi = 4\sum_{i=0}^{\infty}\frac{-1^i}{2i+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$$

(“geeignete Abbruchbedingung”)

Baile-Borwein-Plouffe 1996:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i-1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

Beispiel

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ irgendwo in der Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ vorkommt.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist unbekannt ob f berechenbar ist !

Es ist sogar unbekannt ob $\forall n : f(n) = 1$ (“Normalität” von π).

Beispiel

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \times \text{‘7’ irgendwo in der Dez.-Entwicklung von } \pi \text{ vorkommt.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Is f berechenbar ?

Beispiel

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \times \text{‘7’ irgendwo in der Dez.-Entwicklung von } \pi \text{ vorkommt.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Is f berechenbar ? Ja !

Fall $\forall n : n \times$ ‘7’ kommt vor: $\forall n : f(n) = 1$

Fall n kommt höchstens $n_0 \times$ irgendwo vor:

$$\longrightarrow f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \leq n_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also: Berechenbarkeit $\neq$ wir können die Funktion definitiv angeben !

Beispiel

LBA: linearbeschränkte Turingmaschine

DLBA: deterministische linearbeschränkte Turingmaschine

$$i(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \forall LBA\ M \exists DLBA\ D : L(M) = L(D) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir wissen nicht wie $i(n)$ aussieht.

Aber, $i(n)$ ist eine konstante Funktion und damit offensichtlich berechenbar.

Nichtberechenbare Funktionen

Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$f_r(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ist Anfangsabschnitt der Dezimalbruchentwicklung von } r. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Annahme: $\forall r : f_r$ ist berechenbar.

$\longrightarrow \exists$ mindestens soviele berechenbare Funktionen wie reelle Zahlen.

Widerspruch:

- Die Menge der berechenbaren Funktionen ist abzählbar
  (weil durch endlich langen Text beschrieben).
- $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Nichtberechenbare Funktionen

Es gibt sie. Aber können wir eine konkret hinschreiben ?

todo

Church'sche These

Von Turingmaschinen berechenbare Funktionen

sind genau die im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen.

Kein Satz aber allgemein akzeptiert.

Begründung

- Alle bekannten Berechnungsmodelle selbst sind schwächer oder äquivalent.

  das kann man beweisen

- Keine „intuitiv" berechenbare Funktion bekannt, die nicht Turing-berechenbar ist.

Turingmaschinen berechnen Funktionen

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ realisiert die partielle Funktion
$f_T : \Sigma^* \to \Gamma^* \Leftrightarrow$

$$f_T(w) := \begin{cases} v & \text{falls } T \text{ hält nach Eingabe von } w \text{ mit Ausgabe } v \\ & ((s)w \Rightarrow u(q)v), q \in F \text{ (Schöning: } u \text{ weglassen)} \\ \perp = \text{(undefiniert)} & \text{sonst} \end{cases}$$

g Turingberechenbar $\Leftrightarrow \exists T : f_T = g$

Bemerkung: wenn $g(x) = \perp$ hält T nicht.

Turingmaschinen berechnen

numerische Funktionen

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ Turingberechenbar $\Leftrightarrow$

$\exists T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F) : \forall n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N} :$

$f(n_1, \ldots, n_k) = m \Leftrightarrow$

$(s)\text{bin}(n_1)\#\cdots\#\text{bin}(n_k) \vdash^* u(q)\text{bin}(m), q \in F$

Akzeption $\rightsquigarrow$ Funktion

Funktionenberechnung ist der allgemeinere Begriff.

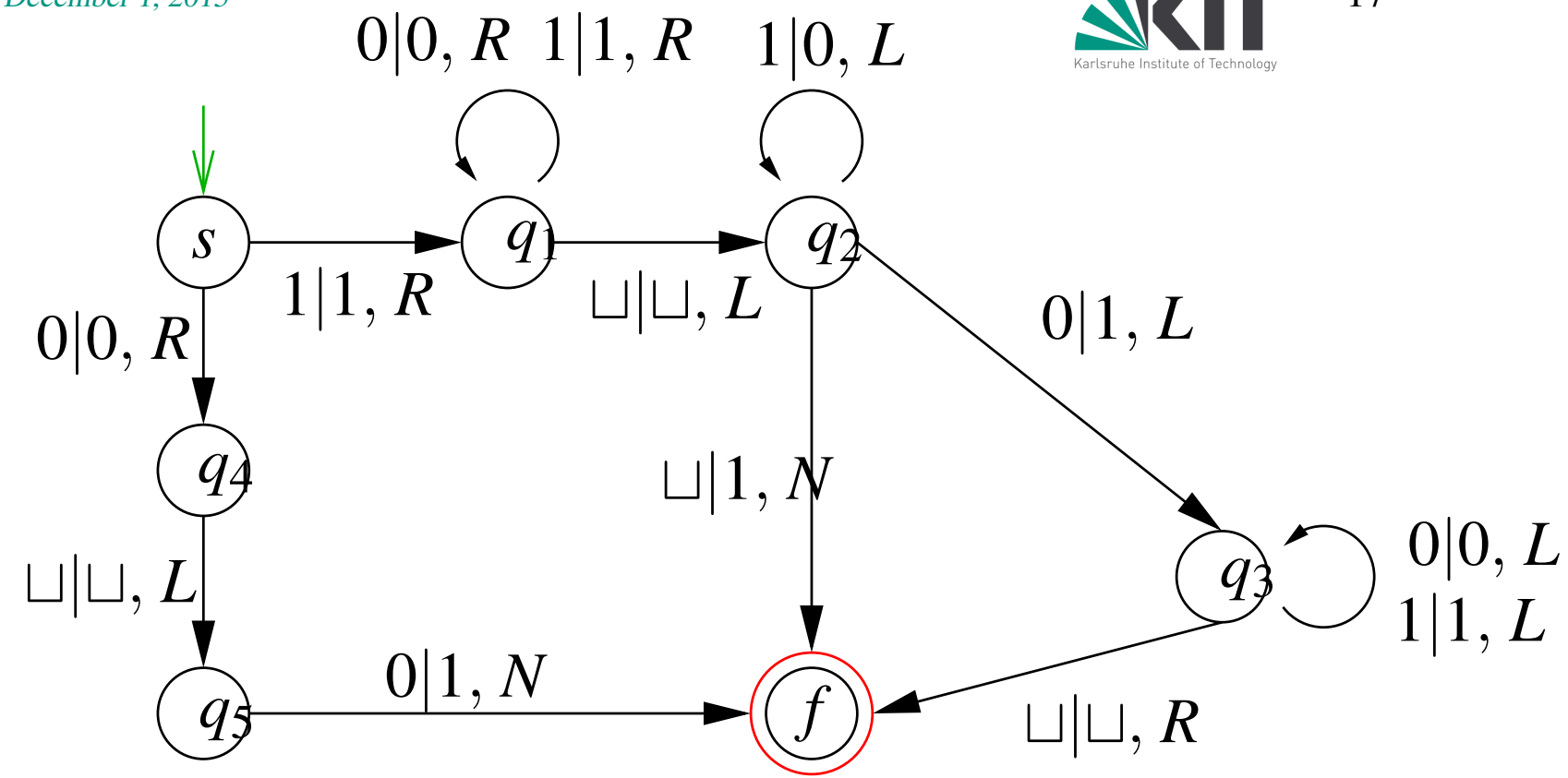
Statt Akzeptor für $L \subseteq \Sigma^*$ betrachte TM, die die „halbe“ charakteristische Funktion

$$\chi'_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.

Aber, wie gesagt, alles „interessante“ kann man bereits mit Aktzeptoren machen.

Beispiel



$$f(w) = \begin{cases} w+1 & \text{falls } w \in 0 \cup 1(0 \cup 1)^*, \\ & w \text{ interpretiert als Binärzahl} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung: Nichteingezeichnete Übergänge gelten hier als Endlosschleife.

Function increment(w)

if first digit $= 0$ **then** //s

if next digit $= \sqcup$ **then** //q_4

overwrite 0 with 1//q_5

else fail//q_4

else if first digit $= 1$//s

scan to the right//q_1

while current digit $= 1$//q_2

overwrite 1 with 0 and go left//q_2

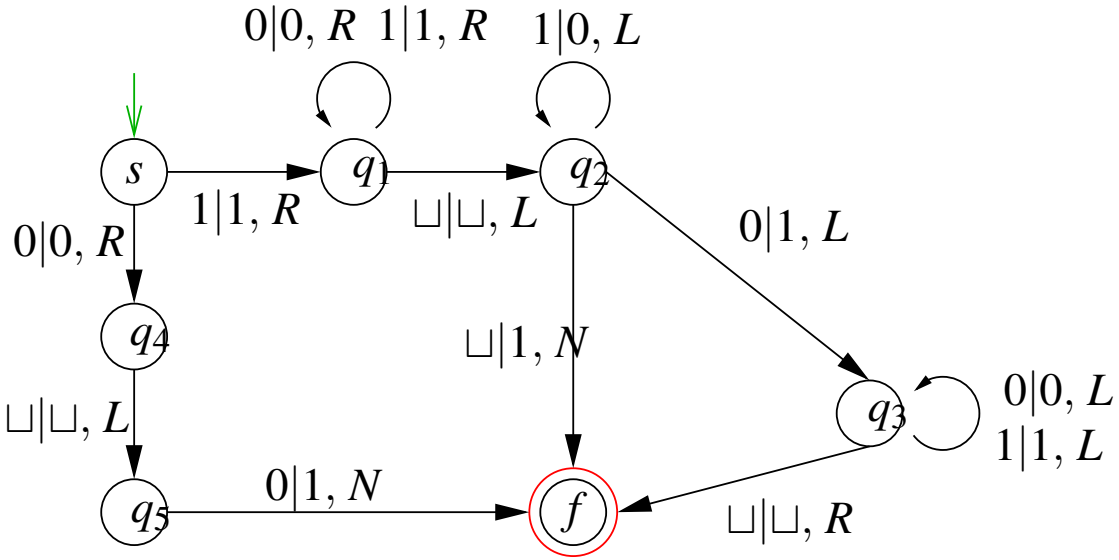
if current digit $= 0$ **then** //q_2

overwrite 0 with 1//q_2

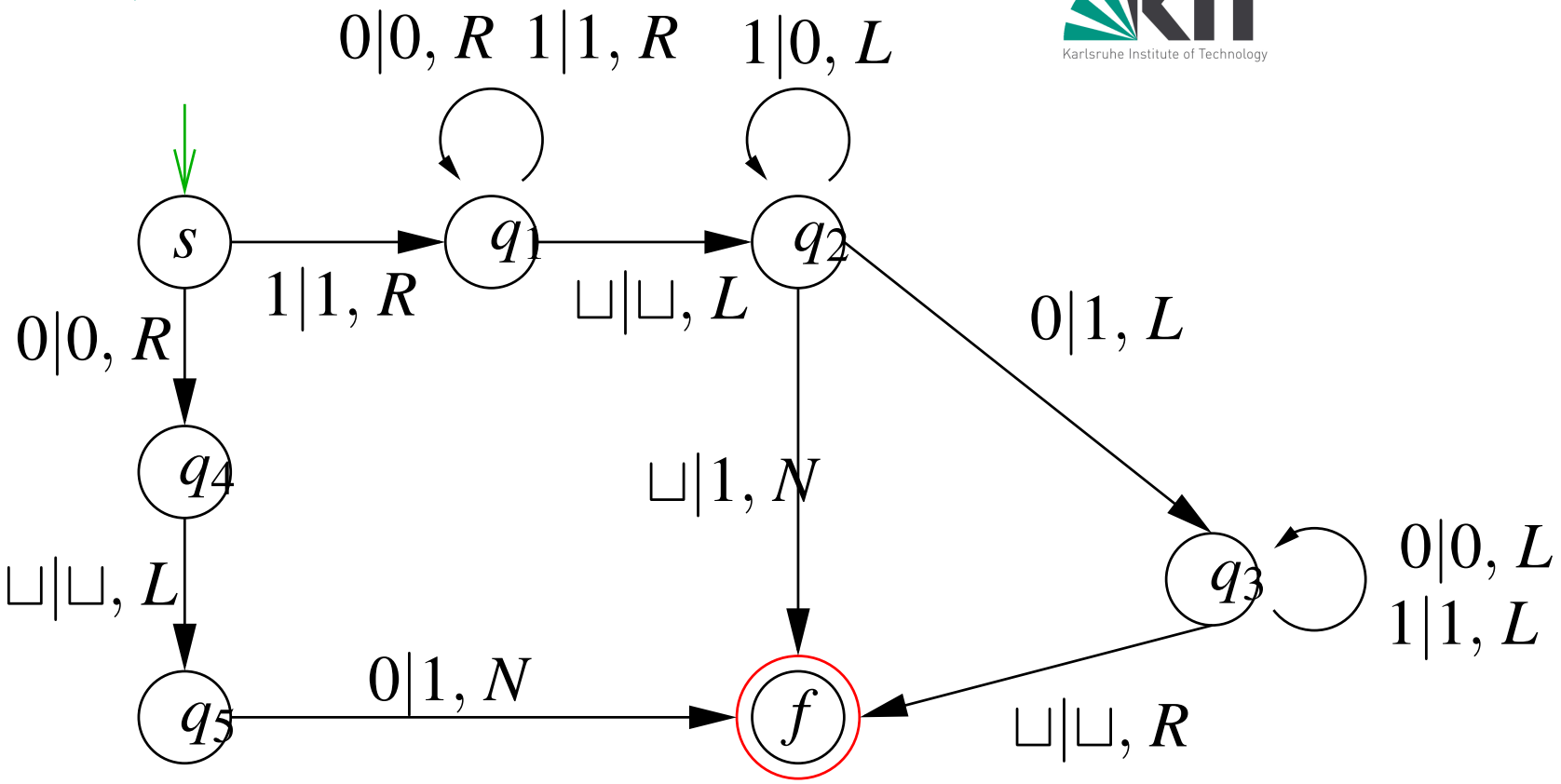
scan to the left//q_3

else if current digit $= \sqcup$ **then** //q_2

overwrite $\sqcup$ with 1//q_2



Beispiel

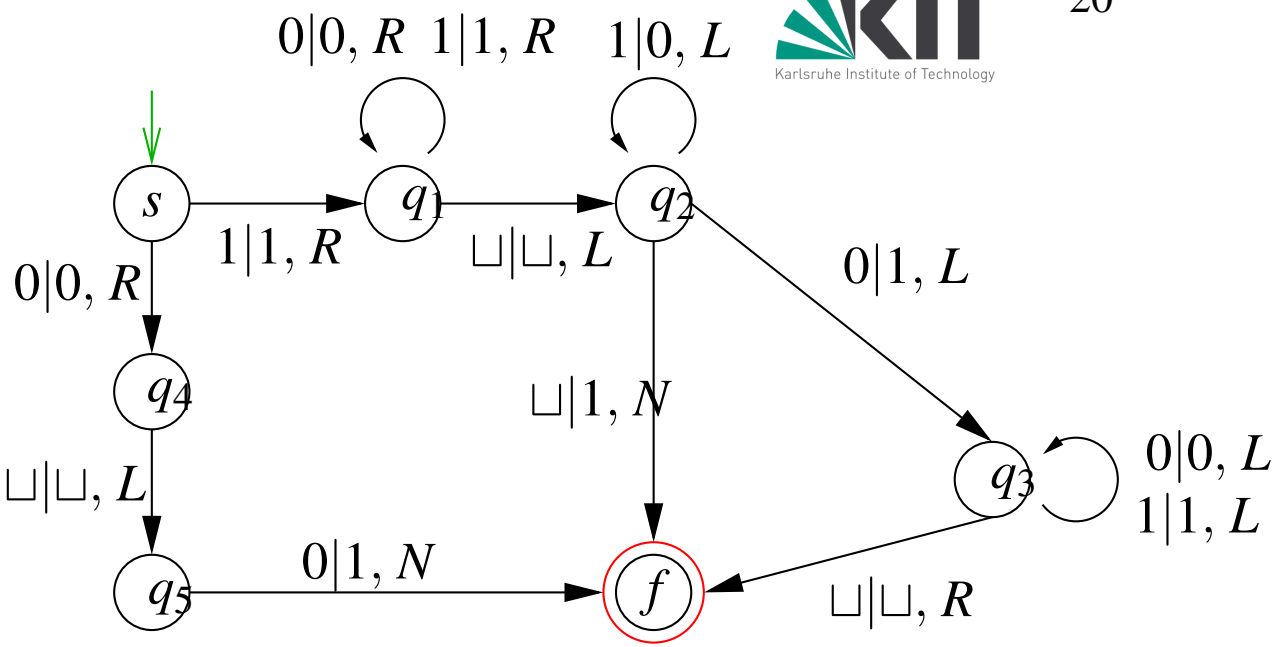


$$(s)11 \vdash 1(q_1)1 \vdash 11(q_1) \vdash 1(q_2)1 \vdash (q_2)10 \vdash (q_2)\sqcup 00 \vdash (f)100$$

Funktionsweise

Fallunterscheidung nach Aufbau der Eingabe.

Sei $w \in \{0,1\}^*$ beliebig, $a \in \{0,1\}, n \geq 1$.



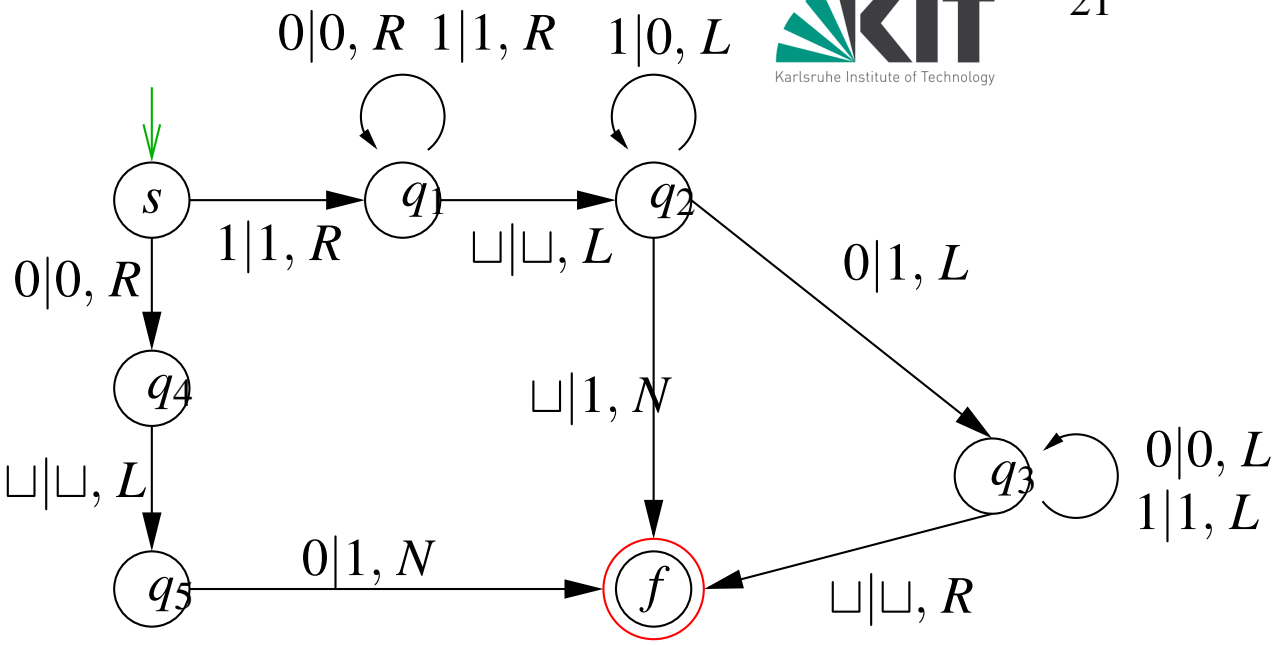
0: $(s)0 \vdash 0(q_4)\vdash (q_5)0 \vdash (f)1$

0aw: $(s)0aw \vdash 0(q_4)aw$ nicht definiert

Funktionsweise

Fallunterscheidung nach Aufbau der Eingabe.

Sei $w \in \{0,1\}^*$ beliebig, $a \in \{0,1\}, n \geq 1$.



1^n: $(s)1^n \vdash 1(q_1)1^{n-1} \overset{n-1}{\vdash} 1^n(q_1) \vdash 1^{n-1}(q_2)1 \overset{n}{\vdash} (q_2)\sqcup 0^n \vdash (f)10^n$

$1w0$: $(s)1w0 \vdash 1(q_1)w0 \overset{|w|+1}{\vdash} 1w0(q_1) \vdash 1w(q_2)0 \vdash 1w(q_3)1 \overset{|w|+1}{\vdash}$
$(q_3)\sqcup 1w1 \vdash (f)1w1$

$1w01^n$:

$(s)1w01^n \vdash 1(q_1)w01^n \overset{|w|+1+n}{\vdash} 1w01^n(q_1) \vdash 1w01^{n-1}(q_2)1 \overset{n}{\vdash}$
$1w(q_2)00^n \vdash 1w(q_3)10^n \overset{|w|+1}{\vdash} (q_3)\sqcup 1w10^n \vdash (f)1w10^n$

Beispiel: Die überall undefinierte Funktion

$$T = (\{s\}, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \{\})$$

$$\forall a \in \Gamma : \delta(s,a) = (s,a,R)$$

Programmiertechniken für Turingmaschinen

- Lokale Variablen
- Hintereinanderschalten
- Spuren
- While-Schleifen

Lokale Variablen

Lokale Variable $x \in A$ speichern, ($|A| < \infty$!):

$Q \rightsquigarrow Q \times A$

Hintereinanderschalten

Gegeben: $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$

OBdA: $(s)w \vdash^* (r) f_T(w)$ für ein $r \in F$ falls $f_T(w) \neq \perp$.,

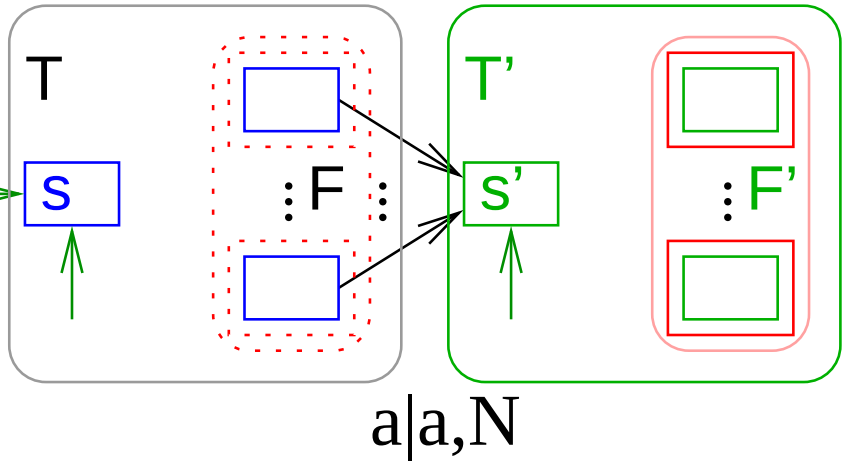
$T' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', s', F')$.

Ausgabe: Turingmaschine $T^\circ = (Q^\circ, \Sigma, \Gamma^\circ, \delta^\circ, s, F')$ für $f_{T'}(f_T(x))$:

$Q^\circ = Q \dot{\cup} Q'$

$\Gamma^\circ = \Gamma \cup \Gamma'$

$$\delta^\circ(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{falls } q \in Q \setminus F \\ (s',a,N) & \text{falls } q \in F \\ \delta'(q,a) & \text{falls } q \in Q' \end{cases}$$



Spuren

$\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_k$.

Beispiele: Arithmetische Operationen auf 2 Binärzahlen, Markierungen...

Kleine Komplikation: Eingabealphabet ändert sich.

Auswege:

- $\Gamma = \Sigma \dot{\cup} \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_k$
- Ersetze $a \in \Sigma$ durch $(a, 0, \ldots, 0)$ in der Eingabe.

While-Schleifen: While $i \neq 0$ Do tape:= $f_T(\text{tape})$

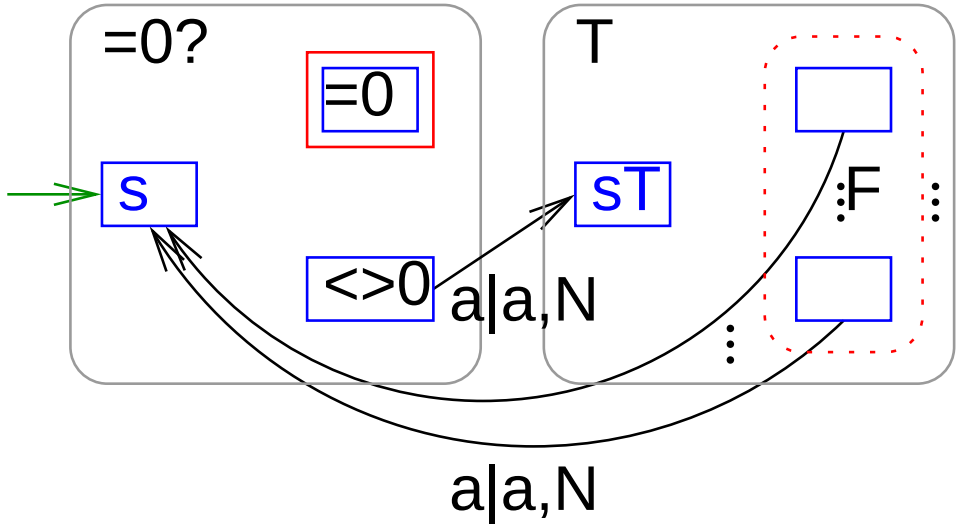
Spur i definiere einen Zähler (unär oder binär)

Unterprogramm: teste ob Spur $i = 0$.

Wenn ja: halt

Lass T laufen

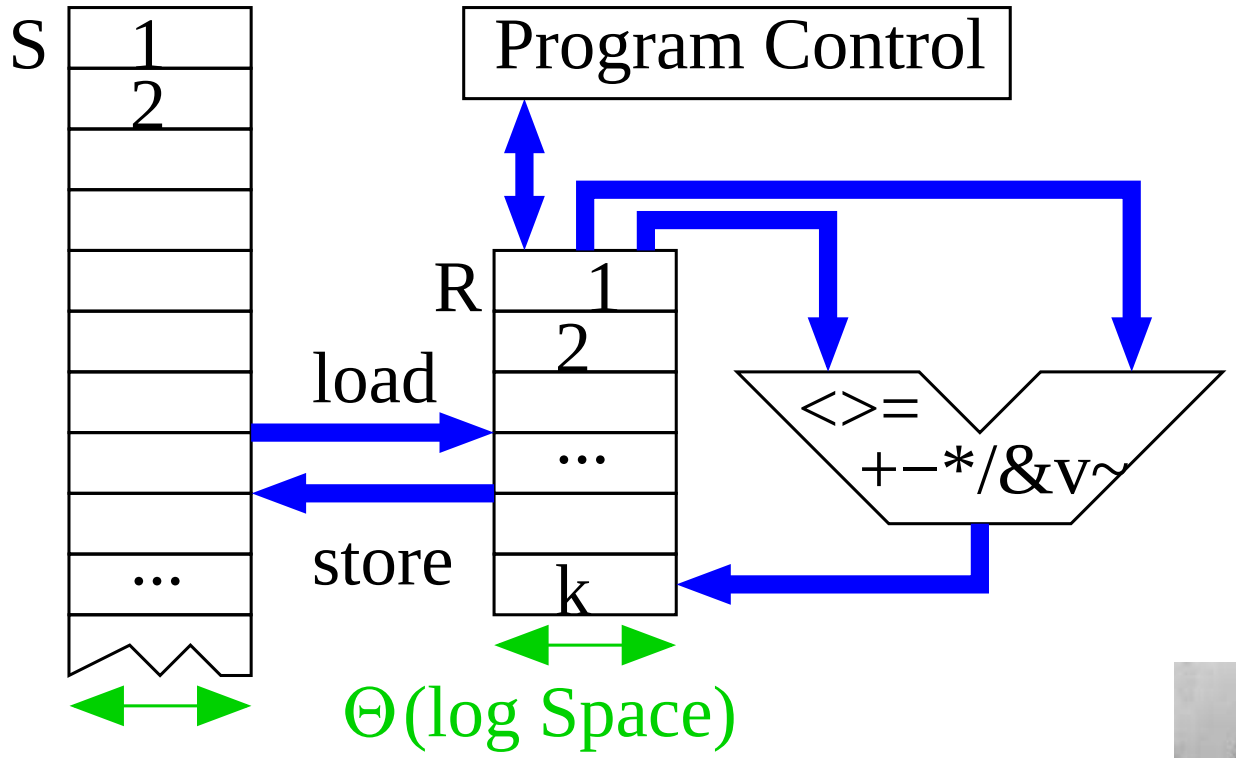
Zurück zum Startzustand. (Übergang $\delta(f, a) = (s, a, N)$)



2.3 LOOP-, WHILE-, GOTO (=Registermaschinen) und RAM-Berechenbarkeit

- Mehrere einfache Berechnungsmodelle
- Alle bis auf eines Turing-mächtig

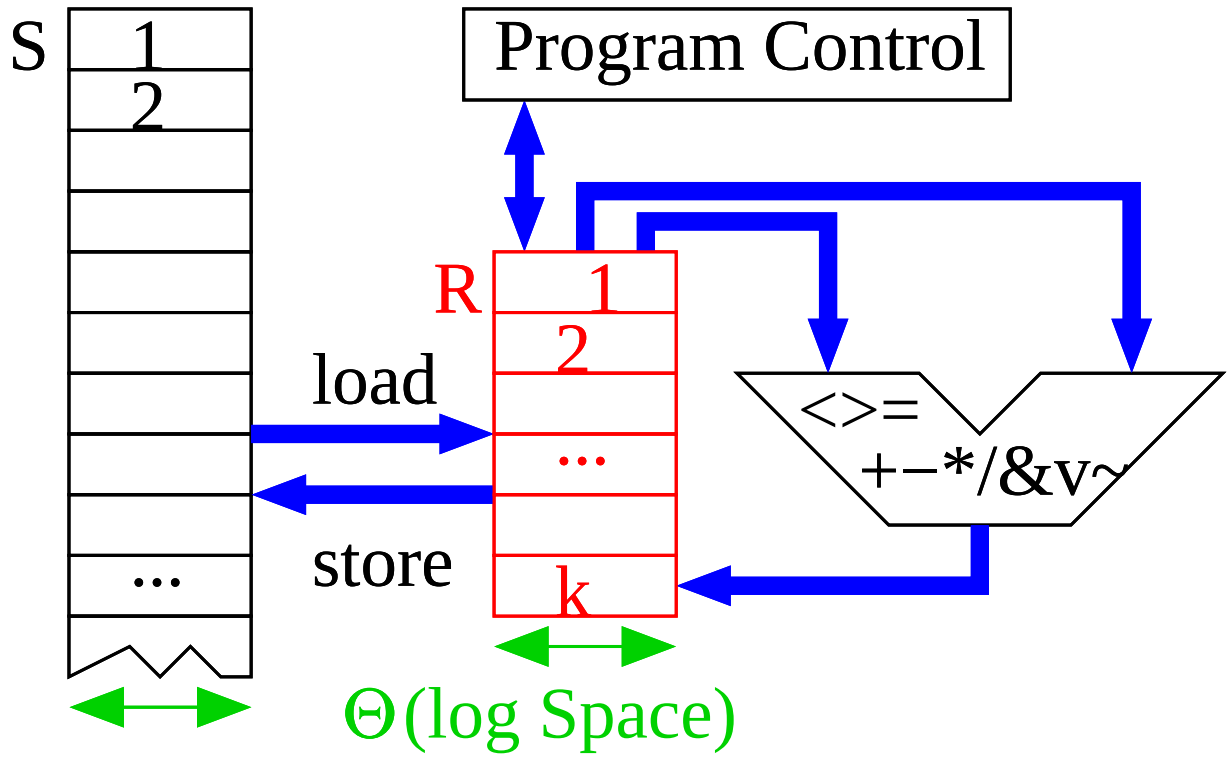
RAM: Random Access Machine



Moderne (RISC) Adapation des

von Neumann-Modells [von Neumann 1945]

Register

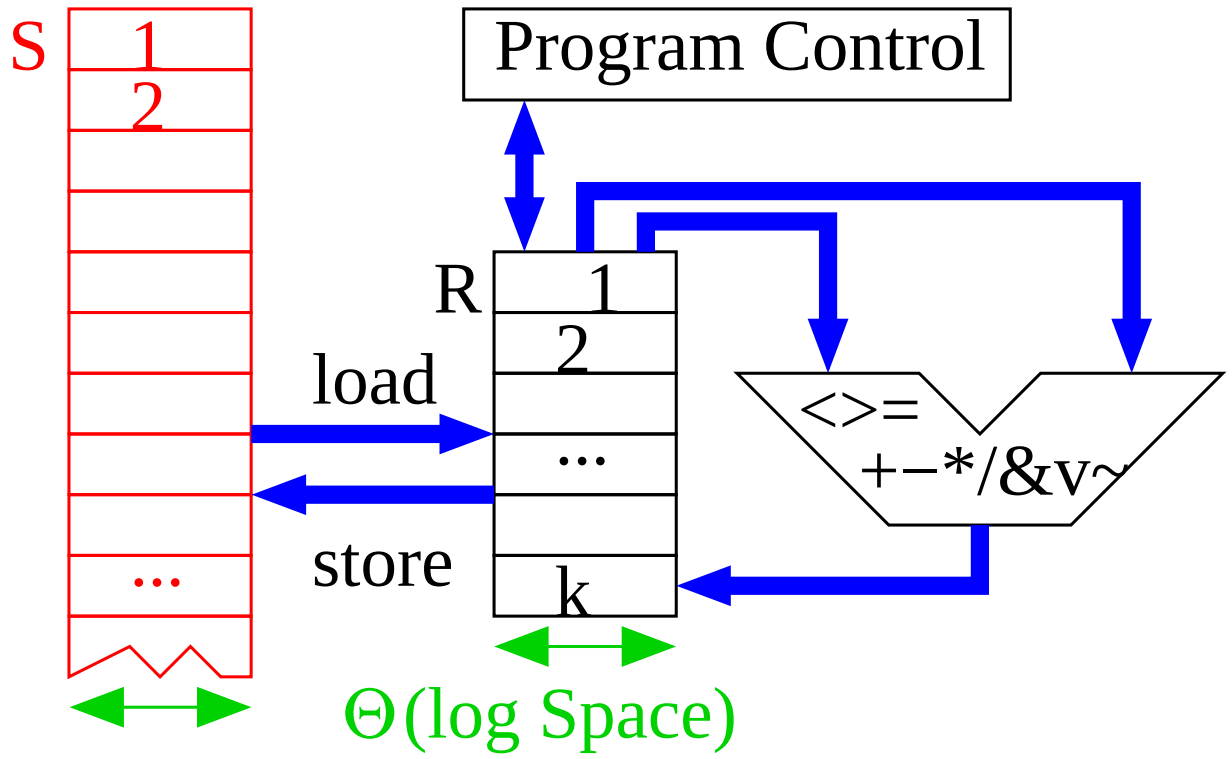


k (irgendeine Konstante) Speicher

$R_1,\ldots,R_k$ für

(kleine) ganze Zahlen

Hauptspeicher

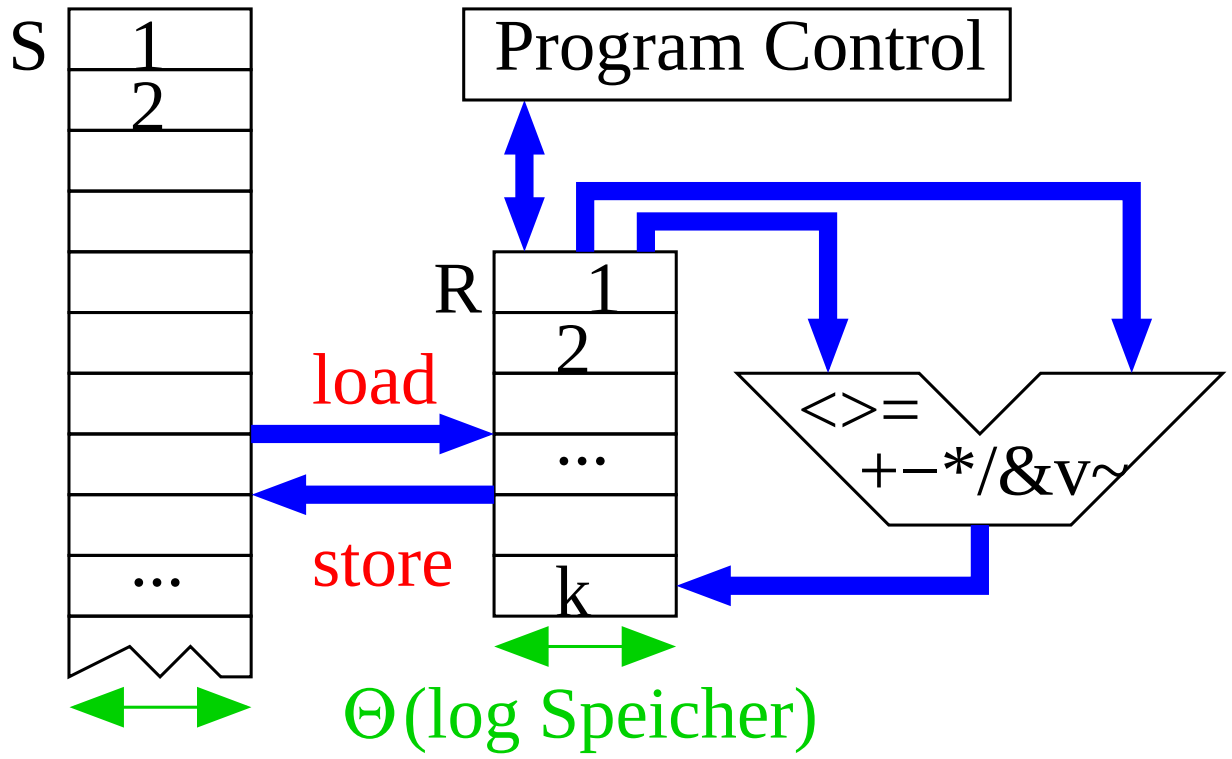


Unbegrenzter Vorrat an Speicherzellen

$S[1], S[2] \ldots$ für

(kleine) ganze Zahlen

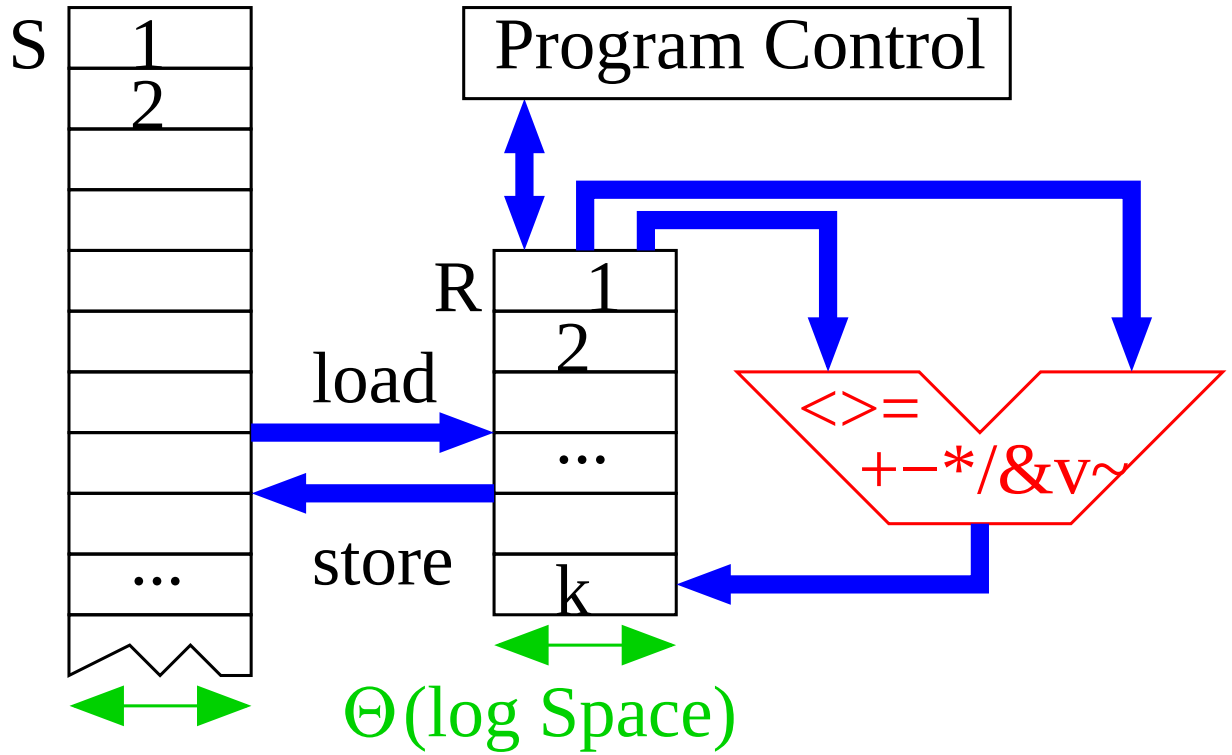
Speicherzugriff



$R_i := S[R_j]$ lädt Inhalt von Speicherzelle $S[R_j]$ in Register R_i.

$S[R_j] := R_i$ speichert Register R_i in Speicherzelle $S[R_j]$.

Rechnen

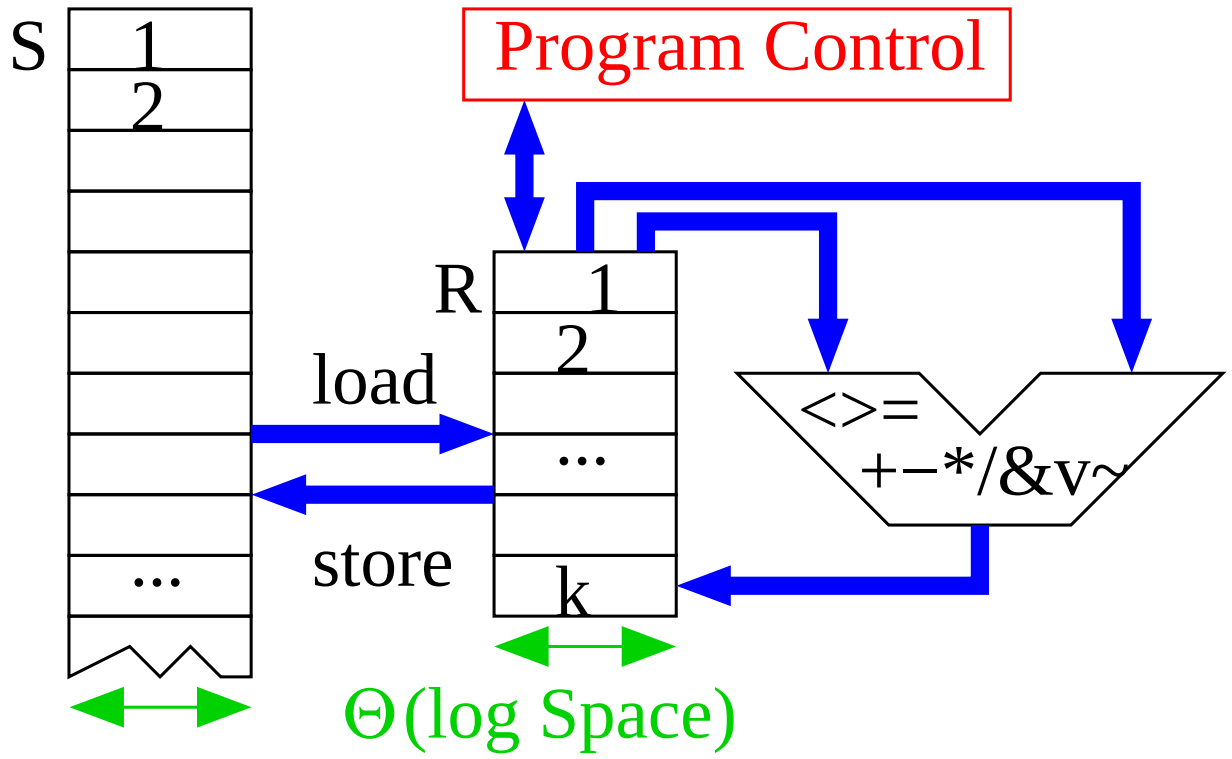


$R_i := R_j \odot R_\ell$ Registerarithmetik.

'$\odot$' ist Platzhalter für eine Vielzahl von Operationen

Arithmetik, Vergleich, Logik

Bedingte Sprünge



JZ j, R_i Setze Programmausführung an Stelle j fort falls $R_i = 0$

„Kleine“ ganze Zahlen?

Alternativen:

Konstant viele Bits (64?): theoretisch unbefriedigend weil nur endlich viel Speicher adressierbar $\rightsquigarrow$ endlicher Automat

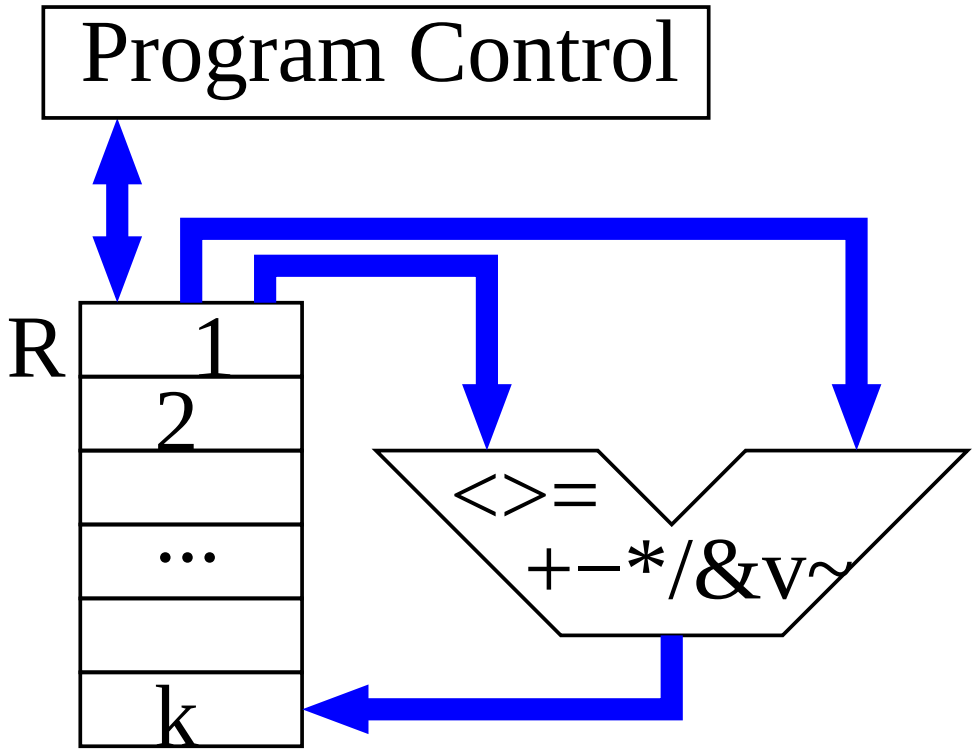
Beliebige Genauigkeit: viel zu optimistisch für vernünftige Komplexitätstheorie. Beispiel: n maliges quadrieren führt zu einer Zahl mit $\approx 2^n$ bits.

OK für Berechenbarkeit

Genug um alle benutzten Speicherstellen zu adressieren: Bester Kompromiss.

Registermaschine

$\approx$ RAM $-$ Speicher $+$ beliebige Genauigkeit



ggf. eingeschränkt auf Inkrementieren, Dekrementieren

Beliebt in der Berechenbarkeit.

Führt zu merkwürdigen Algorithmen.

Registermaschinen-Berechenbarkeit

Konfiguration: $(q, R_1, \ldots, R_k)$

q ist ein Zustand (z.B. Programmzähler)

„$\vdash^*$“ definiert wie gehabt.

$f : \mathbb{N}^{k'} \to \mathbb{N}$, $k' \leq k$ Registermaschinen-berechenbar $\Leftrightarrow$

$\exists$RM $M : \forall n_1, \ldots, n_{k'}, m \in \mathbb{N}$:

$$f(n_1, \ldots, n_{k'}) = m \Leftrightarrow$$

$$(1, n_1, \ldots, n_{k'}, 0^{k-k'}) \vdash^* (q, f(n_1, \ldots, n_k), \ldots)$$

mit PROGRAM$[q]$ =HALT

RAM-Berechenbarkeit

Konfiguration: $(q, R_1, \ldots, R_k, S)$

Sei M eine RAM:

Eingabe: $w \in \Sigma^n$ in $S[1],\ldots,S[n]$

Ausgabe: $f_M(w)$ in $S[1],\ldots,S[|f_M(w)|]$

wenn HALT-Befehl ausgeführt wird.

Natürliche Zahlen passen i.allg. nicht in einzelne

Register/Speicherzellen und müssen codiert werden ! Analog TM

Höhere Programmiersprachen

Java, C/C++, C#, Go, Python, JavaScript, R, Ruby, Matlab, Perl...

ML, Lisp, Scheme, Scala, Erlang...

Prolog, Oz,...

...

sind das uns am meisten geläufige Programmiermodell.

Compiler übersetzen das routinemäßig in RAM Code.

LOOP-Programme

Minimalistische Programmiersprache für Berechenbarkeitstheorie:

$\mathbb{N}$ main$(\mathbb{N}x_1, \ldots, \mathbb{N}x_k)\{$

$\mathbb{N}\, x_0 = 0; \mathbb{N}\, x_{k+1} = 0; \mathbb{N}\, x_{k+2} = 0; \ldots$

body;

return x_0;

}

body darf benutzen

Zuweisung: $x_i := x_j + c, c \in \{-1, 0, 1\}$ $\qquad 0 - 1 := 0$

Schöning: $c \in \mathbb{Z}$

';': Sequenz von Anweisungen

loop x_i: Schleife. Wiederhole x_i mal. Relevant ist der Inhalt von x_i VOR der ersten Schleifenausführung.

LOOP-Programme

Beobachtung: Loop-Programme terminieren immer.

Definition: f ist Loop-berechenbar gdw.
$\exists$ Loop-Programm P, das f berechnet.

Frage: welche Funktionen sind Loop-berechenbar?

Gibt es totale berechenbare Funktionen, die nicht Loop-berechenbar sind?

Leicht nachzubauende Anweisungen

$x := x + c$ // $c \in \mathbb{Z}$

$x := y + z$

$x := y \dot{-} z$ // $y \dot{-} z = y - z$ falls $y \geq z$, 0 sonst

$x := y \cdot z$

$x := y$ div z

$x := y$ mod z

beliebige Arithmetische Ausdrücke

if $x \neq 0$ **then** ...

Beispiel Addition $x_0 := x_1 + x_2$

$x_0 := x_1$

loop x_2

    $x_0{+}{+}$

Beispiel Multiplikation $x_0 := x_1 \cdot x_2$

loop x_1

$x_0 := x_0 + x_2$

Beispiel **if** $x = 0$ **then** A

y:= 1

loop x

    $y--$

loop y

    A

While-Programm

Minimalistische Programmiersprache für Berechenbarkeitstheorie:

$\mathbb{N}$ main$(\mathbb{N}x_1, \ldots, \mathbb{N}x_k)\{$

$\quad \mathbb{N}\, x_0 = 0; \mathbb{N}\, x_{k+1} = 0; \mathbb{N}\, x_{k+2} = 0; \ldots$

$\quad$ body;

$\quad$ return x_0;

$\}$

body darf benutzen

Zuweisung: $x_i := x_j + c, c \in \{-1, 0, 1\}$ $\qquad 0 - 1 := 0$

';': Sequenz von Anweisungen

while$(x_i \neq 0)$: Schleife

WHILE simuliert LOOP

loop x **do**

P

$\rightsquigarrow$

$y := x$ // y kommt in P nicht vor

while $y \neq 0$ **do**

$y := y - 1$

P

Kann LOOP While simulieren ?

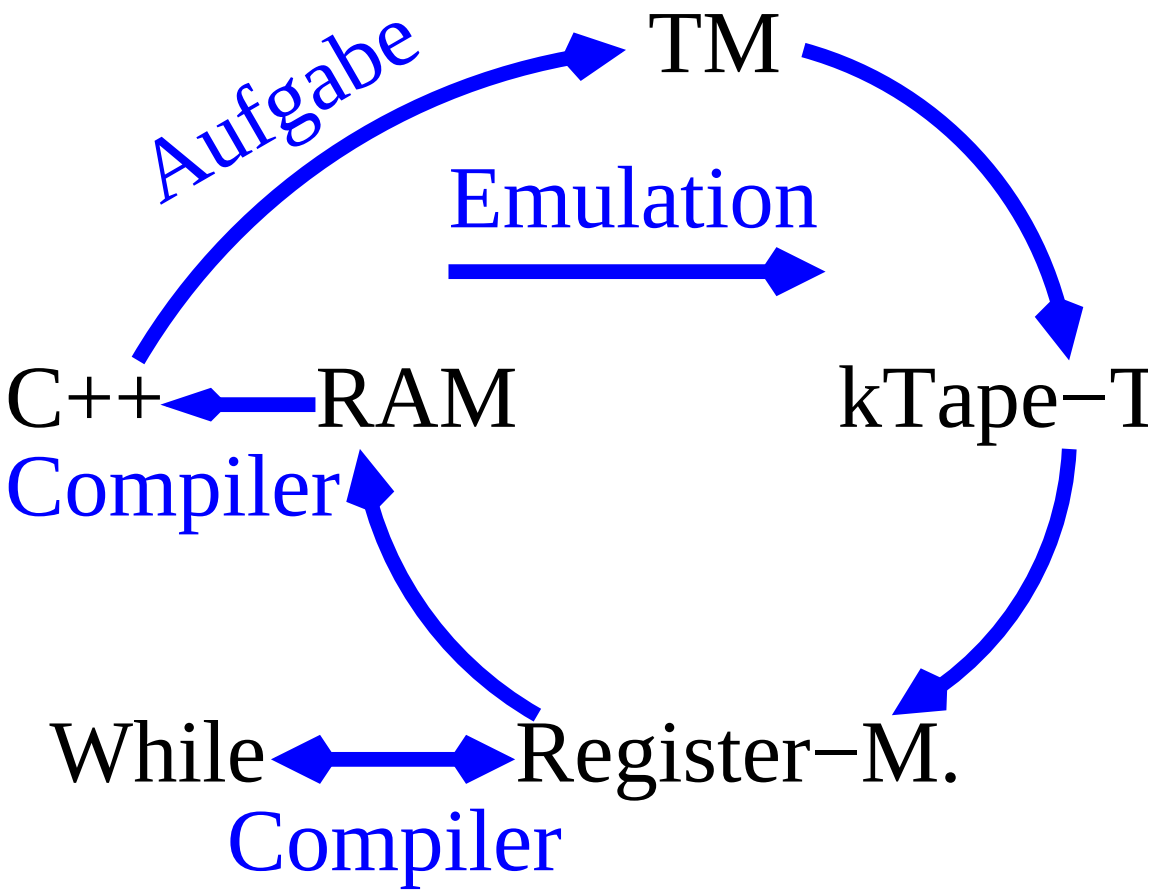
Nein !

Warum nicht ?

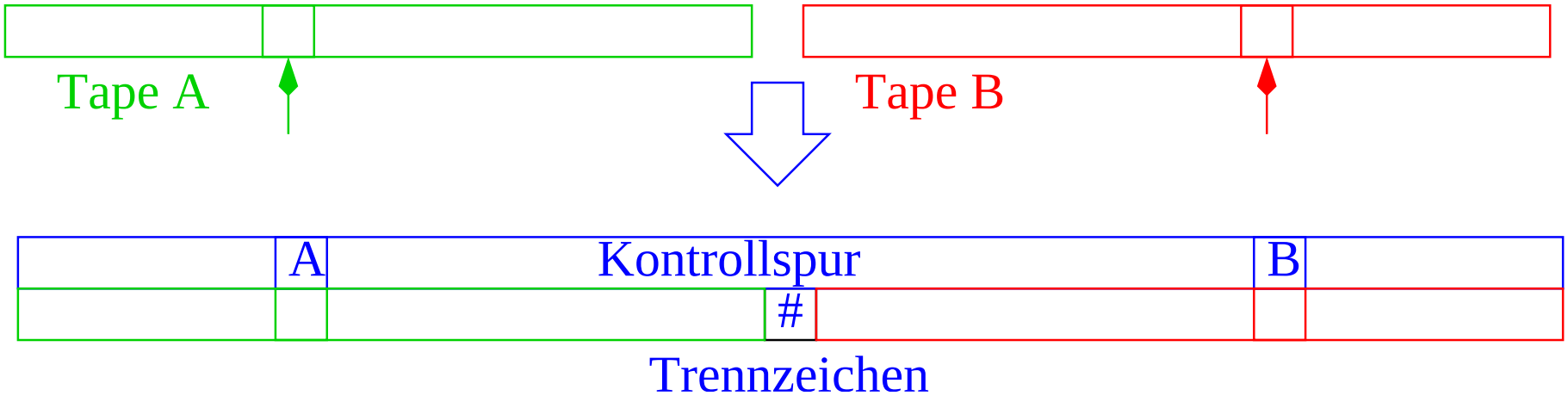
Wenigstens alle totalen Turingberechenbaren Funktionen ?

$\rightsquigarrow$ später

Äquivalenz von Maschinenmodellen



Turingmaschine emuliert k-Band-TM



- Nichleere Bandteile aneinanderhängen (Trennzeichen benutzen)
- Kopfpositionen markieren
- Zustand speichert $k-1$ Bandsymbole

Satz: Zeit T mit k-Band-TM $\rightarrow$ Zeit $\mathcal{O}\left(T^2\right)$ auf Einband-TM.

k-Band-TM emuliert Registermaschine

- Ein Band pro Register (Binärformat oder Unärformat)
- Eigene Zustände für jede Programmzeile
- Unterprogramme für Arithmetik
- Zuweisung $\rightarrow$ Band kopieren

Registermaschine emuliert RAM

Idee: zusätzliches Register R_S repräsentiert Speicher:

$$R_S = \sum_i S[i] \cdot 2^{bi}$$

mit b =Anzahl Bits der RAM

$S[i]$ in R_j laden:

$$R_j := \frac{R_S}{2^{bi}} \bmod 2^b \quad .$$

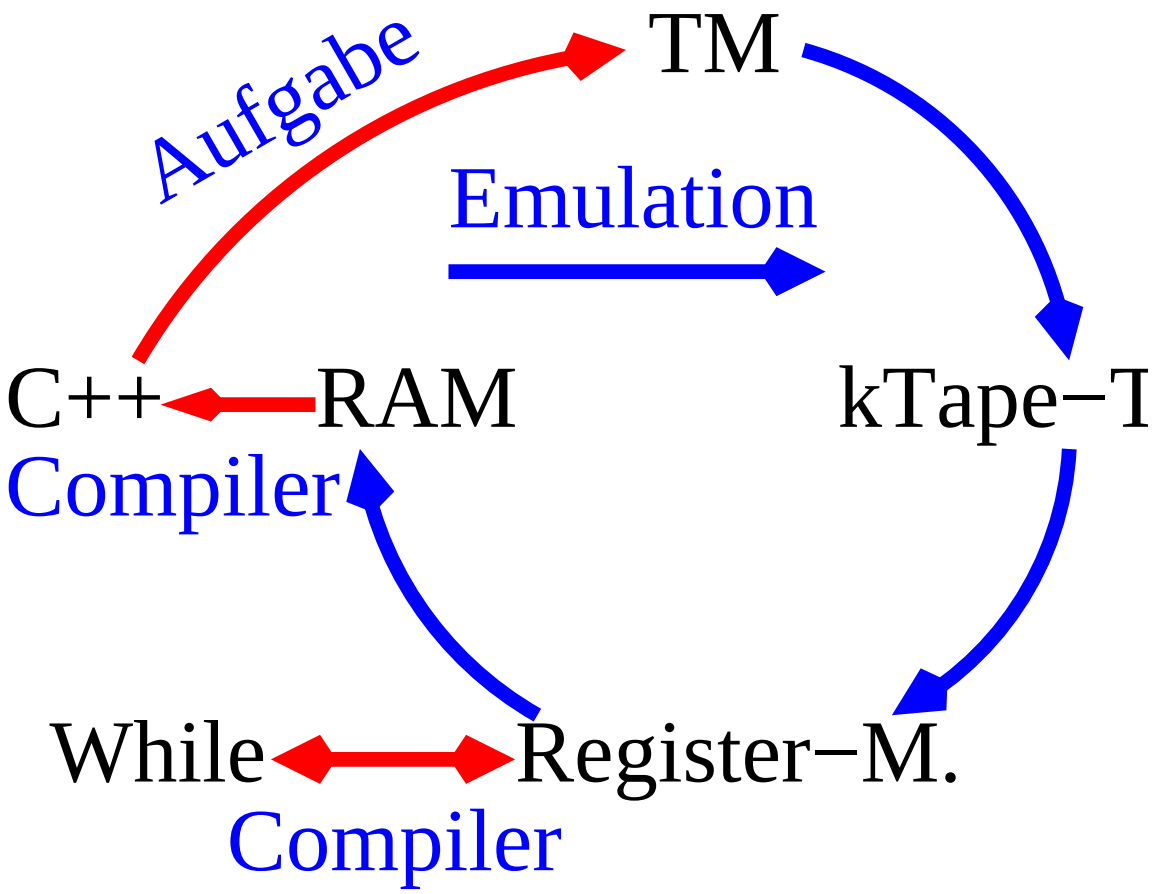
$S[i] := 0$:

$$R_S := R_S - (\frac{R_S}{2^{bi}} \bmod 2^b) 2^{bi}$$

R_j in $S[i]$ speichern:

$$S[i] := 0; R_S := R_S + R_j \cdot 2^{bi}$$

Äquivalenz von Maschinenmodellen



Markov-Algorithmen

deterministisches regelbasiertes String-Rewriting.

Geg: Eingabe $w \in \Sigma^*$

Menge von Regeln $\Delta \in (\Gamma^* \times \Gamma^*)^*$

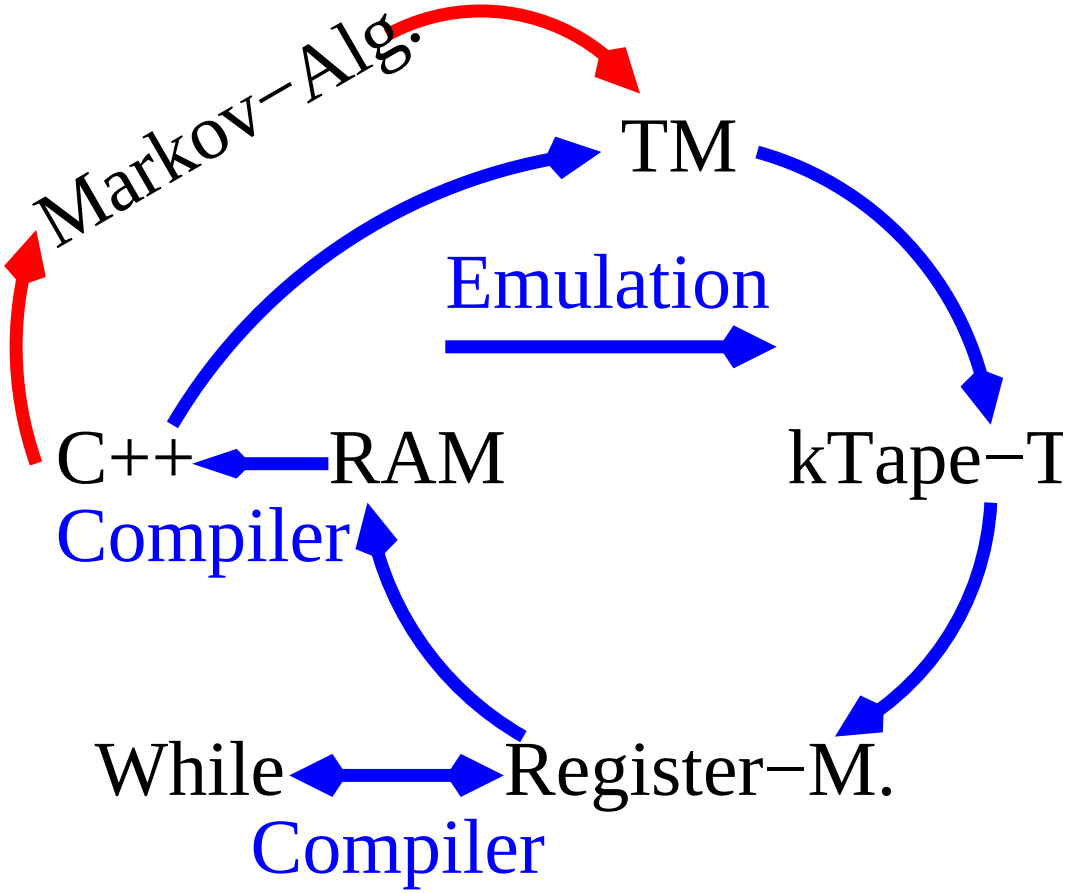
while $\exists(\ell, r) \in \Delta, u, v \in \Gamma^* : w = u\ell v$ **do**

find the first rule $(\ell, r) \in R$

and the shortest $u \in \Gamma^*$ such that $w = u\ell v$ for some $v \in \Gamma^*$

$w := urv$

Markov-Algorithmen: Turingmächtigkeit



Markov-Algorithmen: Turingmächtigkeit

Gegeben: TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ mit Eingabe w.

OBdA: max 1 $\sqcup$ links und rechts der Eingabe wird angeschaut.

Betrachte Markovalgorithmus für Alphabet $Q \cup \Gamma \cup \{(,)\}$.

$\Delta = \cdots$ Sonderregeln für den Rand

- $\left\langle ((q)a, (q')a') : \delta(q,a) = (q', a', N) \right\rangle$
- $\left\langle (c(q)a, (q')ca') : \delta(q,a) = (q', a', L) \right\rangle$
- $\left\langle ((q)ac, a'(q')c) : \delta(q,a) = (q', a', R) \right\rangle$

Eingabe des Markovalgorithmus: $\sqcup(s)w\sqcup$

Die Folge der produzierten Strings ist gerade die Folge der Konfigurationen der Turingmaschine!

Semi-Thue-Systeme

Sowas wie nichtdeterministische Markov-Algorithmen.

Ebenfalls turingmächtig.

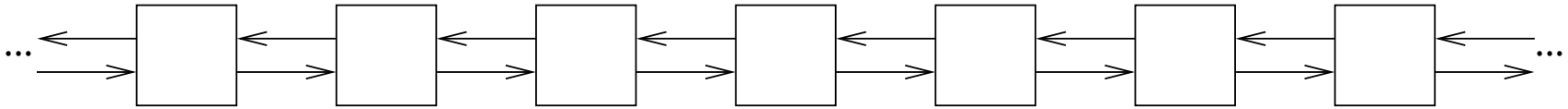
Unsere TM-Simulation hat immer genau eine anwendbare Regel.

Zellularautomaten

Betrachte den endlichen Automaten $(\{0,1\}, \{0,1\}^2, \delta, \emptyset)$ mit

Q	0	1	0	1	0	1	0	1
$L \times R$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,1)$
δ	0	1	1	1	0	1	1	0

Verbinde unendlich viele solcher Automaten zu einer Kette



[M. Cook 2002]: Diese Maschine ist Turing-mächtig.

siehe auch Wikipedia „rule 110 cellular automaton“

Quantencomputer

- Ein Qubit speichert Superpositionen von 0 und 1.
- Berechnungen mit n Qubits berechnen eine Superposition von 2^n klassischen Berechnungen
- Messungen erhalten bestimmte Informationen über all diese Berecnungen bestimmen
- Quantencomputer können in polynomieller Zeit faktorisieren und diskrete Logarithmen bestimmen
- Dies würde viele kryptografische Algorithmen kompromittieren

Quantencomputer: Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie

- Vermutung der Komplexitätstheorie:
  - Faktorisieren, DLog sind nicht in P (selbst mit Randomisierung)
  - Faktorisieren, DLog sind nicht NP hart.
- Turingmaschinen können Quantencomputer simulieren

Fazit: Quantencomputer wären schneller aber nicht mächtiger als klassische Computer

2.4 Primitiv rekursive und μ-rekursive Funktionen

hier nicht

2.5 Die Ackermannfunktion

[Ackermann 1928, Hermes]

Function $a(x,y)$

if $x = 0$ **then return** $y+1$

if $y = 0$ **then return** $a(x-1,1)$

return $a(x-1,a(x,y-1))$

Satz: a ist eine totale, TM-berechenbare Funktion

Beweisskizze:

Rekursion $\rightsquigarrow$ Stapel bei RAM $\rightsquigarrow$ TM

Totalität der Ackermannfunktion

Beweis: Induktion über die lexikographische Reihenfolge von (x,y):

Induktionsanfang: $a(0,y) = y+1$

Induktionsschritt für $y = 0$:

$a(x,0) = a(x-1,1)$,

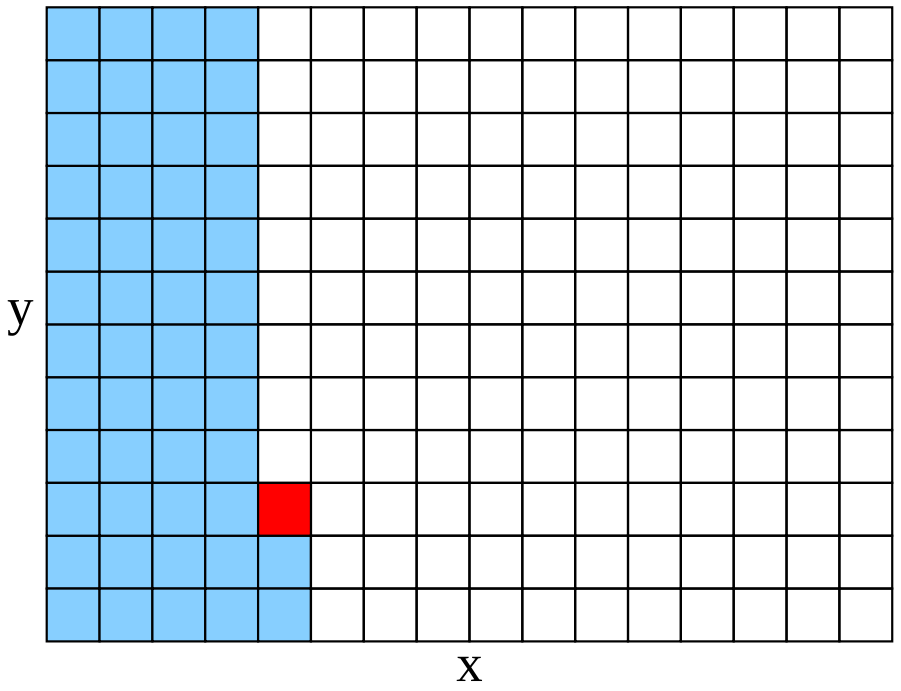
terminiert, da $(x-1,1) < (x,0)$

Induktionsschritt für $x,y > 0$:

$a(x-1,a(x,y-1))$ terminiert da

$(x,y-1) < (x,y)$ und

$(x-1,a(x,y-1)) < (x,y)$



Wie große Zahlen berechnet ein Loop Programm?

Definition:

Seien für ein Loop Programm P

$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ der Variablenvektor bei Programmstart. Hier beliebig!

$\mathbf{x}' = (x'_0, x'_1, \ldots)$ der Variablenvektor bei Programmende.

$$f_P(\mathbf{x}) := \sum_{i \geq 0} x'_i$$

$$f_P(n) := \max \left\{ f_P(\mathbf{x}) : \sum_{i \geq 0} x_i \leq n \right\}$$

Die Ackermann Funktion ist nicht Loop-berechenbar

Beweisansatz: Annahme a ist Loop-berechenbar.

$\longrightarrow a(n,n) = g(n)$ ist berechenbar durch ein Loop-Programm G.

$\longrightarrow a(n,n) = g(n) \leq f_G(n)$

Wir aber zeigen:

Lemma E: $\forall$Loop-Programm $P : \exists k : \forall n \in \mathbb{N} : f_P(n) < a(k,n)$.

Widerspruch.

Beispiele

$$a(0,y) = y+1$$

$$\begin{aligned} a(1,y) &= a(0,a(1,y-1)) = a(1,y-1)+1 = \\ &\quad a(0,a(1,y-2))+1 = a(1,y-2)+2 = \cdots = \\ &\quad a(1,0)+y = y+a(0,1) = y+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(2,y) &= a(1,a(2,y-1) = 2+a(2,y-1) = \cdots \\ &\quad = 2y+a(2,0) = 2y+a(1,1) = 2y+3 \end{aligned}$$

Beispiele

$$
\begin{aligned}
a(2,y) &= 2y+3 \\
a(3,y) &= a(2,a(3,y-1)) = 2a(3,y-1)+3 \\
&= 2a(2,a(3,y-2))+3 = 4a(3,y-2)+3(1+2) \\
&= 4a(2,a(3,y-3)+3(1+2) = 8a(3,y-3)+3(1+2+4) \\
&= \cdots = 2^y \underbrace{a(3,0)}_{=5} + 3(\underbrace{1+2+\cdots+2^{y-1}}_{=2^y-1}) \\
&= 2^{y+3}-3
\end{aligned}
$$

Beispiele

$$a(3,y) = 2^{y+3} - 3$$

$$a(4,y) = a(3,a(4,y-1)) = 2^{a(4,y-1)+3} - 3$$

$$= 2^{a(3,a(4,y-2))+3} - 3 = 2^{2^{a(4,y-2)+3}-3+3} - 3$$

$$= 2^{2^{a(3,y-3)+3}} - 3 = 2^{2^{2^{a(4,y-3)+3}-3+3}} - 3$$

$$= \cdots = 2^{\overset{2}{\vdots}\ \overbrace{a(4,0)}^{=a(3,1)=2^{1+3}-3}\ +3} - 3 = 2^{\overset{2^{16}}{\vdots}} - 3$$

y-Stapel von 2ern

$$a(4,2) = 2^{2^{16}} - 3 = 2^{65536} - 3$$

Monotonie der Ackermann Funktion

Lemma A: $y < a(x,y)$

Lemma B: $a(x,y) < a(x,y+1)$

Lemma C: $a(x,y+1) \leq a(x+1,y)$

Lemma D: $a(x,y) < a(x+1,y)$

Lemma BD: $a(x,y) \leq a(x',y')$ falls $x \leq x'$ und $y \leq y'$

Beweis: Übung. Induktion,. . .

Lemma E: $\forall$Loop-Programm $P : \exists k : \forall n \in \mathbb{N} : f_P(n) < a(k,n)$.

Beweis: Induktion über Aufbau des Loop-Programms.

Induktionsanfang:

$f_{\text{LeeresProgramm}}(n) = n < n+1 = a(0,n)$.

$f_{x:=y+c}(n) \leq 2n+1 < 2n+3 = a(2,n)$

Induktionsschritt für $P = P_1; P_2$:

Nach IV $\exists k_1, k_2 : f_{P_1}(n) < a(k_1, n) \wedge f_{P_2}(n) < a(k_2, n)$.

Sei nun $k_3 = \max\{k_1 - 1, k_2\}$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f_P(n) &\leq f_{P_2}(f_{P_1}(n)) && \text{Def. } f_P \\
&< a(k_2, f_{P_1}(n)) && \text{IV} \\
&< a(k_2, a(k_1, n)) && \text{IV,Monotonie} \\
&\leq a(k_3, a(k_3 + 1, n)) && \text{Monotonie} \\
&= a(k_3 + 1, n + 1) && \text{Def. } a \\
&\leq a(k_3 + 2, n) && \text{Lemma B}
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt für $P =$ **loop** x_i **do** Q:

OBdA x_i kommt in Q nicht vor (ggf. in neue Var. kopieren).

Nach IV $\exists k : f_Q(n) < a(k,n)$.

Sei $\mathbf{x}$ eine Eingabe bei der $f_P(\mathbf{x})$ maximiert wird für $\sum_j x_j \leq n$.

Sei $m \leq n$ der Wert von x_i in $\mathbf{x}$

$$
\begin{aligned}
f_P(n) &= f_P(\mathbf{x}) \\
&\leq \underbrace{f_Q(f_Q(\cdots f_Q}_{m \text{ mal}}(n-m)\cdots))+m && \text{Def. } m \\
&\leq a(k, \underbrace{f_Q(f_Q(\cdots f_Q}_{m-1 \text{ mal}}(n-m)\cdots))) + m - 1 && \text{IV}\cdots \\
&\leq \underbrace{a(k, a(k, \cdots a(k}_{m \text{ mal}}, n-m)\cdots)) + m - m && \text{IV}
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt für $P =$ **loop** x_i **do** Q:

$$
\begin{aligned}
f_P(n) &\leq \underbrace{a(k, a(k, \cdots a(k}_{m \text{ mal}}, n-m)\cdots)) \\
&< \underbrace{a(k, a(k, \cdots a(k}_{m-1 \text{ mal}}, a(k+1, n-m)\cdots)) && \text{Monotonie} \\
&= \underbrace{a(k, a(k, \cdots a(k}_{m-2 \text{ mal}}, a(k+1, n-m+1)\cdots)) && \text{Def.}a \\
&= \cdots = a(k+1, n-1) && \text{Def.}a \\
&\leq a(k+1, n) && \text{Monotonie}
\end{aligned}
$$

qed.

Mehr schnell wachsende Funktionen

$k \mapsto \max\{f_P(0) : P \text{ ist term. While-Programm mit } k \text{ Instr.}\}$

Fleißige Biber

$\Sigma(n)$: $\max_\delta$ #Einsen, die auf dem Band stehen nachdem eine DTM $(\{1,\ldots,n,Z\},\emptyset,\{0,1\},\delta,1,\{Z\})$ hält (leere Eingabe).

$S(n)$: $\max_\delta$ #Zustandsübergänge, die eine haltende DTM $(\{1,\ldots,n,Z\},\emptyset,\{0,1\},\delta,1,\{Z\})$ gemacht hat (leere Eingabe).

Wissen über Fleißige Biber

$\Sigma(n)$, $S(n)$ sind totale nichtberechenbare Funktionen.

n	$\Sigma(n)$	$S(n)$
1	1	1
2	4	6
3	6	21
4	13	107
5	$\geq$4 098	$\geq$47 176 870
6	$> 3.514 \cdot 10^{18267}$	$> 7.412 \cdot 10^{63534}$

[http://www.drb.insel.de/~heiner/BB/],

[http://www.logique.jussieu.fr/~michel/ha.html]

Rekordhalter

```
n:      6          5          4          3          2
q/in 0   1    0   1    0   1    0   1    0   1
A:  B1R E1L; B1R C1L; B1R B1L; B1R Z1L; B1R B1L
B:  C1R F1R; C1R B1R; A1L C0L; B1L C0R; A1L Z1R
C:  D1L B0R; D1R E0L; Z1R D1L; C1L A1L;
D:  E1R C0L; A1L D1L; D1R A0R;
E:  A1L D0R; Z1R A0L;                   n=1:
F:  Z1L C1R;                            H1N ---
```

Langsam wachsende Funktionen

Inverse Ackermannfunktion

$$\alpha(m,n) := \min\{i \geq 0 : a(i, \lfloor m/n \rfloor) > \log_2 n\}$$

Für jeden realistischen Fall gilt $\alpha(m,n) \leq 5$.

Aber $\alpha(m,n) \notin O(1)$.

Eine wichtige Datenstruktur hat Gesamtkomplexität $m\Theta(\alpha(m,n))$ für m Operationen auf n Objekten:

Union-Find Datenstruktur

Class UnionFind$(n : \mathbb{N})$ // Maintain a partition of $1..n$

Function find$(i : 1..n) : 1..n$

assert $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

find$(i) =$ find$(j) \Leftrightarrow i, j$ are in the same part

Procedure union$(i, j : 1..n)$

$A :=$ the part with $i \in A$

$B :=$ the part with $j \in B$

join A and B to a single part

Anwendung: z.B. Kruskal's Algorithmus für minimale Spannbäume

Class UnionFind($n : \mathbb{N}$)

parent$=[1,2,\ldots,n]$: **Array** $[1..n]$ **of** $1..n$

gen$=[0,\ldots,0]$: **Array** $[1..n]$ **of** $0..\log n$ // generation of leaders

Function find($i : 1..n$) : $1..n$

if parent$[i] = i$ **then return** i

else $i' :=$ find(parent[i])

parent$[i] := i'$ // path compression

return i'

Procedure link($i, j : 1..n$)

assert i and j are leaders of different subsets

if gen$[i] <$ gen$[j]$ **then** parent$[i] := j$ // balance

else parent$[j] := i$; **if** gen$[i] =$ gen$[j]$ **then** gen$[i]{+}{+}$

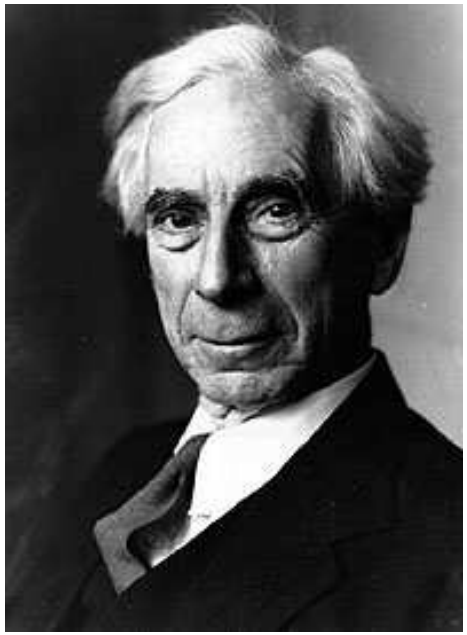
Procedure union($i, j : 1..n$)

if find$(i) \neq$ find(j) **then** link(find(i), find(j))

2.6 Halteproblem, Unentscheidbarkeit, Reduzierbarkeit

- Gödelnummerierung: TMs könen sich selbst als Eingabe verarbeiten
- Wichtiges Beispiel: Universelle TM
- Diagonalisierungsargument: definiere uentscheidbare Sprache
- Reduktionen: Zeige, dass auch nützliche Probleme unentscheidbar sind

Paradoxien und Selbstbezüglichkeit



Der Barbier von Hintertupfingen

rasiert genau die Männer im Dorf,

die sich nicht selbst rasieren.

Wer rasiert den Barbier?

Paradoxien und Selbstbezüglichkeit

Daniel Düsentrieb behauptet, eine allwissende Maschine erfunden zu haben.

Ja Nein

Man stellt eine Ja/Nein-Frage und die Antwort leuchtet auf.

Dagobert Duck kauft die Maschine.

Will aber nur bei korrekter Funktion zahlen.

Er stellt der Maschine die Frage:

Wirst Du mit Nein antworten?

Was passiert?

Entscheidbarkeit

$A \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar gdw.

die charakteristische Funktion χ_A berechenbar ist.

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ 0 & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Semi-Entscheidbarkeit

$A \subseteq \Sigma^*$ semi-entscheidbar gdw.

die „halbe“ charakteristische Funktion χ_A berechenbar ist.

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ \bot & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Satz: $A \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar $\Leftrightarrow$

A und $\bar{A}$ sind beide semi-entscheidbar

Beweisskizze: Sei TM

M_A Akzeptor für A und

$M_{\bar{A}}$ Akzeptor für $\bar{A}$

for $s := 1$ **to** ∞ **do**

if M_A stoppt nach s Schritten **then** Accept

if $M_{\bar{A}}$ stoppt nach s Schritten **then** Reject

Rekursive Aufzählbarkeit

$A \subseteq \Sigma^*$ rekursiv aufzählbar gdw.

$\exists$totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$:

$$A = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$$

Satz: A ist rekursiv aufzählbar $\Leftrightarrow$ A ist semi-entscheidbar

Rekursiv aufzählbar $\longrightarrow$ semi-entscheidbar

Sei A rekursiv aufzählbar mittels f.

Function $\chi'_A(x)$

  for $s := 1$ **to** ∞ **do**

    if $f(n) = x$ **then return** 1

Semi-entscheidbar $\longrightarrow$ rekursiv aufzählbar

Fall $A = \emptyset$: trivial.

Sonst geben wir eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ mit Wertebereich A an.

Function $f(n)$

a:= some fixed element of A

interpret n as bit string w

split w into w_1, w_2 with $|w_1| = \lceil |w|/2 \rceil, |w_2| = \lfloor |w|/2 \rfloor$

interpret w_1 as an integer k

interpret w_2 as a word $u \in \Sigma^*$

if an acceptor M for A accepts u in $\leq k$ steps **then return** u

else return a

Semi-entscheidbar $\longrightarrow$ rekursiv aufzählbar

- f ist total
- f gibt nur Werte aus A aus
- $\forall u \in A \exists k : M$ akzeptiert u in k Schritten
- $f(\text{Kodierung}(k,u)) = u$

■

Äquivalente Aussagen

- A rekursiv aufzählbar
- A semi-entscheidbar
- A ist vom Chomsky-Typ 0
- $A = L(M)$ für TM M
- χ'_A is Turing-, While-, RegM., RAM, ... berechenbar
- A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
- A ist Bereichbereich einer berechenbaren Funktion

2.7 Nicht-entscheidbare Probleme

Normierung von Turing-Maschinen

Betrachte $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$. OBdA:

- $Q = \{1, \ldots, n\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}, \sqcup = 2$
- $s = 1$
- $F = \{2\}$

für geeignete Konstante n

Gödelnummer $\langle M \rangle$ einer Turingmaschine M

Definiere folgende Zeichenketten über $\{0,1\}$:

Kodiere $\delta(q,a) = (r,b,d)$ durch $0^q\,1\,0^{a+1}\,1\,0^r\,1\,0^{b+1}\,1\,0^d$

wobei $N = 1, L = 2, R = 3$ für die Richtungscodierung d gewählt wird.

Die Turing-Maschine wird dann kodiert durch die Binärzahl:

$$111\text{code}_1 11\text{code}_2 11 \ldots 11\text{code}_z 111,$$

wobei code_i für $i = 1,\ldots,z$ alle Funktionswerte von δ in beliebiger Reihenfolge beschreibt.

Konvention:

n ist nicht Gödelnummer einer TM,

$\rightarrow n$ beschreibt eine TM, die $\emptyset$ akzeptiert

Gödelnummer

Beobachtung

Die Gödelnummerrierung beschreibt eine

injektive Abbildung von normierten TMs auf natürliche Zahlen

Beispiel

Sei $M = (\{1,2,3\},\{0,1\},\{0,1,\sqcup\},\delta,1,\{2\})$, mit

$\delta(1,1) = (3,0,R)$

$\delta(3,0) = (1,1,R)$

$\delta(3,1) = (2,0,R)$

$\delta(3,\sqcup) = (3,1,L)$

$\langle M \rangle$ ist dann:

111010010001010001100010101001000110001001001010001100010001000100100111

Diagonalsprache L_d

Sei M_i die TM mit $\langle M_i \rangle = i$.

Sei w_i die Binärrepräsentation von i.

$L_d := \{w_i : M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}$

Satz: L_d ist unentscheidbar

Beweis:

Annahme:

$L_d = \{w_i : M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}$ ist entscheidbar.

$\overset{\text{Def. „entscheidbar“}}{\rightarrow}$ $\exists M_i : M_i$ akzeptiert L_d und hält stets.

Was macht M_i mit w_i?

$w_i \in L_d \overset{\text{Def. } M_i}{\rightarrow} w_i$ wird akzeptiert. $\overset{\text{Def. } L_d}{\rightarrow} w_i \notin L_d$

$w_i \notin L_d \overset{\text{Def. } M_i}{\rightarrow} w_i$ wird nicht akzeptiert. $\overset{\text{Def. } L_d}{\rightarrow} w_i \in L_d$

Beides führt zu einem Widerspruch.

Korollar:

$\bar{L}_d = \{w_i : M_i$ **akzeptiert** $w_i\}$ **ist unentscheidbar**

Annahme: $\bar{L}_d$ ist entscheidbar.

$\rightarrow \exists M : M$ akzeptiert $\bar{L}_d$

modifiziere $M \rightsquigarrow M'$ so, dass M' L_d akzeptiert

(Austausch akzeptierende/nichtakzeptierende Haltezustände).

Widerspruch.

Universelle Turingmaschine

$$U = (Q_u, \{0,1\}, \{0,1,\sqcup\}, \delta_u, s_u, F_u)$$

Eingabe: $\langle M \rangle w$

M ist die zu simulierende TM, w ist die binär codierte Eingabe.

U simuliert M auf w.

D.h. U akzeptiert $\langle M \rangle w$ gdw M akzeptiert w

Universelle Turingmaschine

3 Bänder:

1. $\langle M \rangle$
2. Zustand q_M von M unär codiert
3. Bandinhalt w von M

Universelle Turingmaschine

if Präfix v von w repräsentiert eine TM **then** // 111Tupel111

verschiebe v auf Band $\langle M \rangle$

$q_M := 1$ // Startzustand von M

while $q_M \neq 2$ **do** // Endzustand von M

laufe zum Anfang von $\langle M \rangle$

foreach $(q,a,r,b,d) \in \langle M \rangle$ **do** // Feld für Feld

if $q = q_M$ **then** // Vergleich mit Band q_M

if Eingabezeichen von Band 3$= a$ **then**

$q_M := r$ // auf Zustandsband kopieren

b auf Band 3 ausgeben

Bewegung von Band 3 entsprechend d ausführen

Universelle Turingmaschine: 3Band→1Band

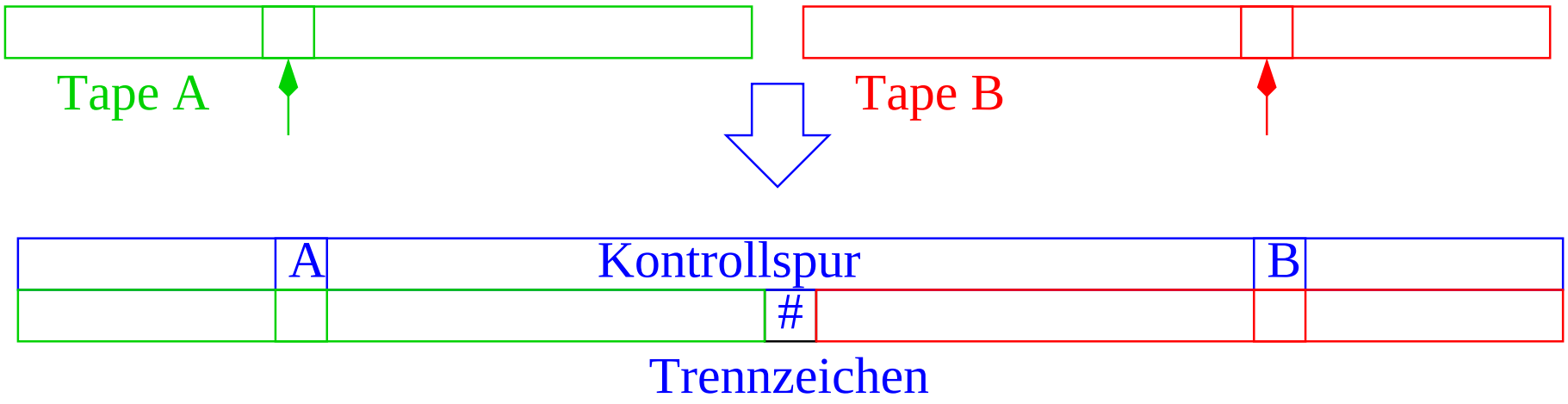
Eigentlich wissen wir wie das geht.

Problem: Bandalphabet unabhängig von M aber $> \{0,1\}$

Codiere Bandalphabet durch konst. viele $\{0,1\}$.

Problem: Eingabe muss auch codiert werden.

Das erledigt eine vorgeschaltete CodierungsTM.



Halteproblem

$H := \{w_i v : M_i \text{ angesetzt auf } v \text{ hält}\}$

Satz: H ist nicht entscheidbar.

Beweis: angenommen H sei entscheidbar.

Wir konstruieren eine TM, die $\bar{L}_d$ akzeptiert.

$w_i \in \bar{L}_d$?

$\Leftrightarrow M_i$ akzeptiert w_i.

$\Leftrightarrow w_i w_i \in H \wedge M_i$ akzeptiert w_i.

Dies könnten wir mit Hilfe einer TM für H und einer universellen TM leicht ausrechnen.

Widerspruch.

Das beschränkte Halteproblem

Satz:

$\{w_i v \# w_j$: M_i angesetzt auf v hält nach höchstens j Schritten$\}$

ist entscheidbar.

Beweisskizze:

Lasse universelle TM U angesetzt auf $w_i v$

für j simulierte Schritte laufen.

Mehr unentscheidbare Probleme

Gegeben Turingmaschinen T, T'

- ☐ $L(T) = \emptyset$? — Leerheit
- ☐ $|L(T)| = \infty$? — Unendlichkeit
- ☐ $L(T) = \Sigma^*$? — Vollständigkeit
- ☐ $L(T) = L(T')$? — Äquivalenz

Unentscheidbarkeit von Leerheit

Angenommen M akzeptiert $\{i : L(M_i) = \emptyset\}$

Wir zeigen, dass $\bar{L}_d$ dann entscheidbar wäre.

$w_i \in \bar{L}_d = \{w_i : M_i \text{ akzeptiert } w_i\}$?

Konstruiere eine Turingmaschine $T(i)$:

> erase input
>
> run M_i on w_i
>
> **if** state$(M_i) \neq 2$ **then** endless loop

Nun ist $L(T(i)) \neq \emptyset$ gdw $w_i \in \bar{L}_d$.

Also wäre $\bar{L}_d$ entscheidbar.

Widerspruch

Unentscheidbarkeit von Vollständigkeit

$L(T) = \Sigma^*$?

Gleicher Beweis wie bei Leerheit! Da $T(i)$ seine Eingabe ignoriert!

Metaprogrammierung

Der Beweis von Leerheit nimmt ein Programm und transformiert es in ein anderes.

Wichtige Programmiertechnik.

Postsches Korrespondenzproblem (PKP)

Geg: endliche Folge von Wortpaaren:

$$K = (x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n) \in (\Sigma^+ \times \Sigma^+)^*$$

Frage:

$$\exists i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\} : x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$$

?

Beispiel

- $K = ((1,111),(10111,10),(10,0))$ hat die Lösung $(2,1,1,3)$,
  denn es gilt:

$$x_2x_1x_1x_3 = 10111110 = 10111110 = y_2y_1y_1y_3$$

- $K = ((10,101),(011,11),(101,011))$
  hat keine Lösung:
  $(133\cdots)$

Beispiel [Mirko Rahn]

- $K = ((0,011),(001,1),(1,00),(11,110))$

  hat eine kürzeste Lösung der Länge 595:

  12112121121121212120321211213032120331121311121203121212112131211
  2
  03212112103212130321202111120331121321212121311121211211120320312
  1
  21203212112121212131312032130321203203210312130331121313021032011
  11
  12121121112002101212121212032121121212120212032032130321211203213
  21
  31303303212130303121131130320010321211121211312123032121203212103
  21
  01103213032302121230331011203131021212131210203203120213131213211
  12
  10321111212120211112121212032132121212112032130311203211212130331
  21
  21311212112033103203121203212131021010321303210202123033021321011
  00
  30212122113203121210103202123132110311212312120303213303003

PCP ist semientscheidbar

Algorithmus:

Procedure PCP$((x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n))$
  for $k := 1$ **to** ∞ **do**
    foreach $i_1 \cdots i_k \in \{1..n\}^k$ **do**
      if $x_{i_1} \cdots x_{i_k} = y_{i_1} \cdots y_{i_k}$ **then**
        output $i_1 \cdots i_k$
        return

PCP ist unentscheidbar

Beweis siehe Schöning.

Idee: angenommen lösbar $\rightarrow$ Halteproblem lösbar

$x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k} = (s)w\#\cdots\#u(f)v$

beschreibt akzeptierende Folge von TM-Konfigurationen

Hilberts 10. Problem — Diophantische Gleichungen

Gegeben:

multivariates Polynom p

mit ganzzahligen Koeffizienten.

Frage [Hilbert 1900]:

$$\exists x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{Z} : p(x_1,\ldots,x_n) = 0?$$

[Matiyasevich 1970]: Das Problem ist unentscheidbar.

Abgeschlossenheit entscheidbarer Sprachen

abgeschlossen unter

$\cup$

$\cap$

$\bar{\cdot}$

Abgeschlossenheit semientscheidbarer Sprachen

abgeschlossen unter

$\cup$

$\cap$

nicht abgeschlossen unter

$\bar{\cdot}$

Abgeschlossenheit semientscheidbarer Sprachen unter Vereinigung

Seien M_1 und M_2 Akzeptoren für L_1 bzw. L_2

Akzeptor für $L_1 \cup L_2$:

for $j := 1$ **to** ∞ **do**

if M_1 accepts w after j steps **then** accept

if M_2 accepts w after j steps **then** accept

Nichtabgeschlossenheit semientscheidbarer Sprachen unter Komplementbildung

Annahme: Abgeschlossenheit gilt doch.

Sei M Akzeptor für L_d, $\bar{M}$ Akzeptor für $\bar{L}_d$

Function isInLd(w)

for $j := 1$ **to** ∞ **do**

if M accepts w after j steps **then return** true

if $\bar{M}$ accepts w after j steps **then return** false

Eine von beiden hält.

$\rightarrow L_d$ entscheidbar.

Widerspruch

Anwendung der nebenläufigen Ausführung

Mehrere Algorithmen $A_1, \ldots, A_k$, die ein schwieriges Problem lösen (langsam, schnell, nie).

Führe alle Algoirthmen (pseudo)gleichzeitig aus.

- $-$ Wenn alle gleich schnell haben wir Faktor k Rechenaufwand verschwendet
- $+$ Wenn eins nie fertig wird haben wir unendlich viel gewonnen
- $+$ Bei sehr unterschiedlicher Ausführungszeit können wir im Mittel gewinnen.
- $+$ Wir können parallele Prozessoren verwenden.
- $+$ Oft können wir einen Teil der redundanten Arbeit einsparen

Nebenläufige Ausführung

Anwendungen: Theorembeweiser, Programm/Hardware-Verifizierer, schwierige Planungs- und Optimierungsprobleme

Beispiel: Erfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln in Zeit $\mathcal{O}\left((4/3)^{\#\text{Variablen}}\right)$.

[U. Schöningh, A Probabilistic Algorithm for k-SAT and Constraint Satisfaction Problems, FOCS, 1999]