Suffixe Sortieren

Sortiere die Menge $\{S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\}$
von Suffixen des Strings S der Länge n
(Alphabet $[1,n] = \{1,\ldots,n\}$)
in lexikographische Reihenfolge.

- suffix $S_i = S[i,n]$ für $i \in [0..n-1]$

$S =$ banana:

0	banana
1	anana
2	nana
3	ana
4	na
5	a

$\Longrightarrow$

5	a
3	ana
1	anana
0	banana
4	na
2	nana

Anwendungen

- Volltextsuche
- Burrows-Wheeler Transformation (`bzip2` Kompressor)
- Ersatz für kompliziertere Suffixbäume
- Bioinformatik: Wiederholungen suchen,. . .

Volltextsuche

Suche Muster (pattern) $P[0..m)$ im Text $S[0..n)$

mittels Suffix-Tabelle SA of S.

Binäre Suche: $O(m \log n)$ gut für kurze Muster

Binäre Suche mit lcp: $O(m + \log n)$ falls wir die

längsten gemeinsamen (common) Präfixe

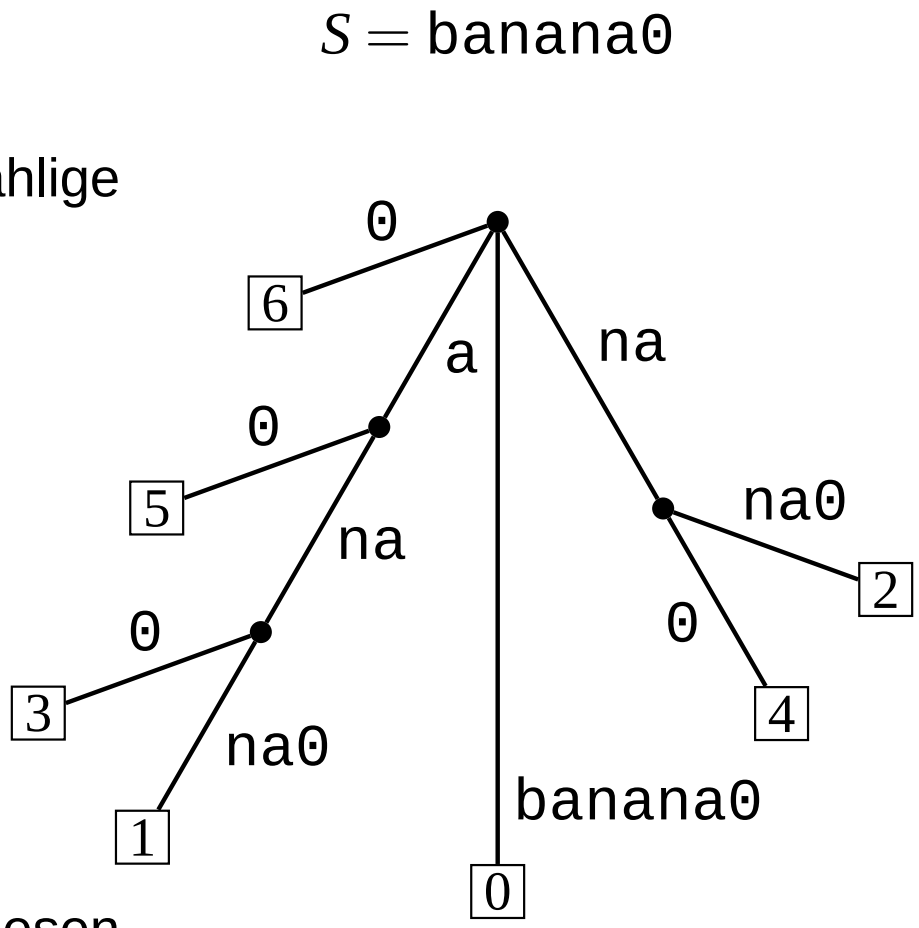
zwischen verglichenen Zeichenketten vorberechnen

Suffix-Baum: $O(m)$ kann aus SA berechnet werden

Suffix-Baum

[Weiner '73][McCreight '76]

- ☐ kompaktierter Trie der Suffixe
- \+ Zeit $O(n)$ [Farach 97] für ganzzahlige Alphabete
- \+ Mächtigstes Werkzeug der Stringology?
- – Hoher Platzverbrauch
- – Effiziente direkte Konstruktion ist kompliziert
- ☐ kann aus SA in Zeit $O(n)$ abgelesen werden



Alphabet-Modell

Geordnetes Alphabet: Zeichen können nur verglichen werden

Konstante Alphabetgröße: endliche Menge

deren Größe nicht von n abhängt.

Ganzzahliges Alphabet: Alphabet ist $\{1,\ldots,\sigma\}$

für eine ganze Zahl $\sigma \geq 2$

Geordnetes $\rightarrow$ ganzzahliges Alphabet

Sortiere die Zeichen von S

Ersetze $S[i]$ durch seinen Rang

```
012345     135024
banana ->  aaabnn
213131 <-  111233
```

Verallgemeinerung: Lexikographische Namen

Sortiere die k-Tupel $S[i..i+k)$ für $i \in 1..n$

Ersetze $S[i]$ durch den Rang von $S[i..i+k)$ unter den Tupeln

Ein erster Teile-und-Herrsche-Ansatz

1. $SA^1 =$sort $\{S_i : i$ ist ungerade$\}$ (Rekursion)
2. $SA^0 =$sort $\{S_i : i$ ist gerade$\}$ (einfach mittels SA^1)
3. Mische SA^0 und SA^1 (schwierig)

Problem: wie vergleicht man gerade und ungerade Suffixe?

[Farach 97] hat einen Linearzeitalgorithmus für Suffix-Baum-Konstruktion entwickelt, der auf dieser Idee beruht.

Sehr kompliziert.

Das war auch der einzige bekannte Algorithmus für Suffix-Tabellen (läßt sich leicht aus S-Baum ablesen.)

SA^1 berechnen

- Erstes Zeichen weglassen.

  banana $\rightarrow$ anana

- Ersetze Buchstabenpaare durch Ihre lexikographischen Namen

  $\boxed{\texttt{an}}\boxed{\texttt{an}}\boxed{\texttt{a}\$}\rightarrow 221$

- Rekursion

  $\langle 1, 21, 221\rangle$

- Rückübersetzen

  $\langle \texttt{a}, \texttt{ana}, \texttt{anana}\rangle$

Berechne SA^0 aus SA^1

1	anana
3	ana
5	a

$\Longrightarrow$

5	a
3	ana
1	anana

Ersetze S_i, $i \bmod 2 = 0$ durch $(S[i], r(S_{i+1}))$

mit $r(S_{i+1})$:= Rang von S_{i+1} in SA^1

0	b 3(anana)
2	n 2(ana)
4	n 1(a)

$\Longrightarrow$

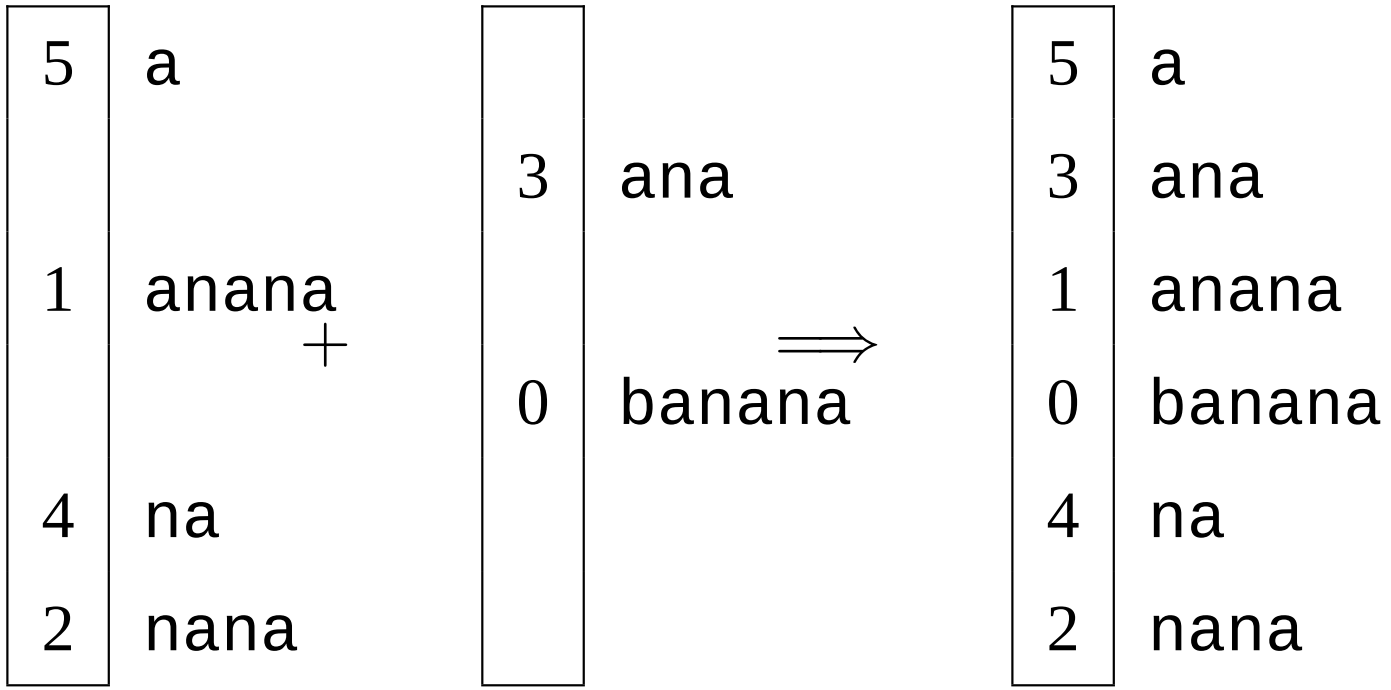
0	banana
4	na
2	nana

Radix-Sort

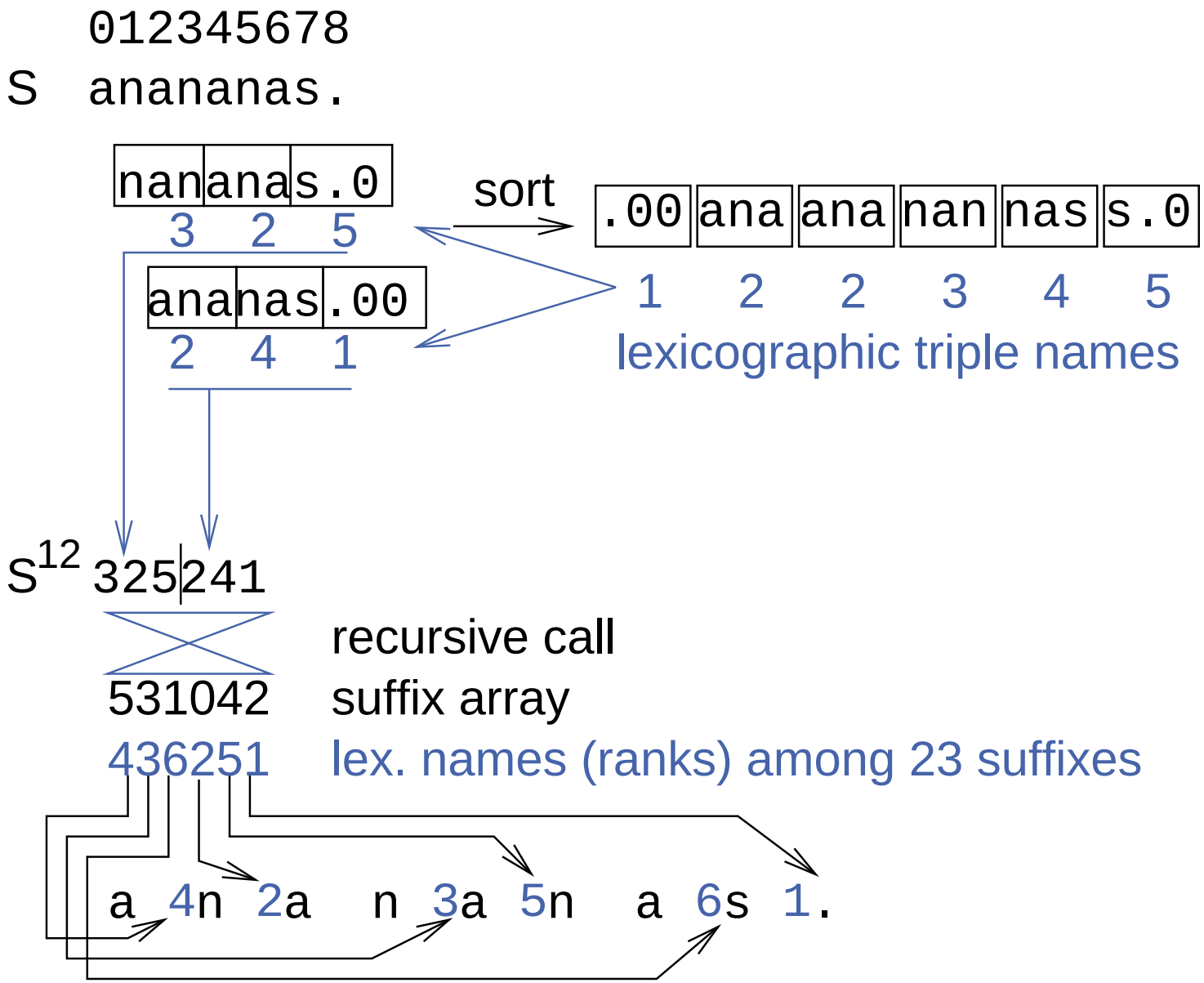
Asymmetrisches Divide-and-Conquer

1. $SA^{12} =$sort $\{S_i : i \bmod 3 \neq 0\}$ (Rekursion)
2. $SA^{0} =$sort $\{S_i : i \bmod 3 = 0\}$ (einfach mittels SA^{12})
3. Mische SA^{12} und SA^{0} (einfach!)

$$S = \text{banana}$$



Rekursion, Beispiel



Rekursion

- sortiere Tripel $S[i..i+2]$ für $i \bmod 3 \neq 0$
  (LSD Radix-Sortieren)
- Finde lexikographische Namen $S'[1..2n/3]$ der Tripel,
  (d.h., $S'[i] < S'[j]$ gdw $S[i..i+2] < S[j..j+2]$)
- $S^{12} = [S'[i] : i \bmod 3 = 1] \circ [S'[i] : i \bmod 3 = 2]$,
  Suffix S^{12}_i von S^{12} repräsentiert S_{3i+1}
  Suffix $S^{12}_{n/3+i}$ von S^{12} repräsentiert S_{3i+2}
- Rekursion auf (S^{12}) (Alphabetgröße $\leq 2n/3$)
- Annotiere die 23-Suffixe mit ihrer Position in rek. Lösung

Least Significant Digit First Radix Sort

Hier: Sortiere n 3-Tupel von ganzen Zahlen $\in [0..n]$ in lexikographische Reihenfolge

Sortiere nach 3. Position

Elemente sind nach Pos. 3 sortiert

Sortiere stabil nach 2. Position

Elemente sind nach Pos. 2,3 sortiert

Sortiere stabil nach 1. Position

Elemente sind nach Pos. 1,2,3 sortiert

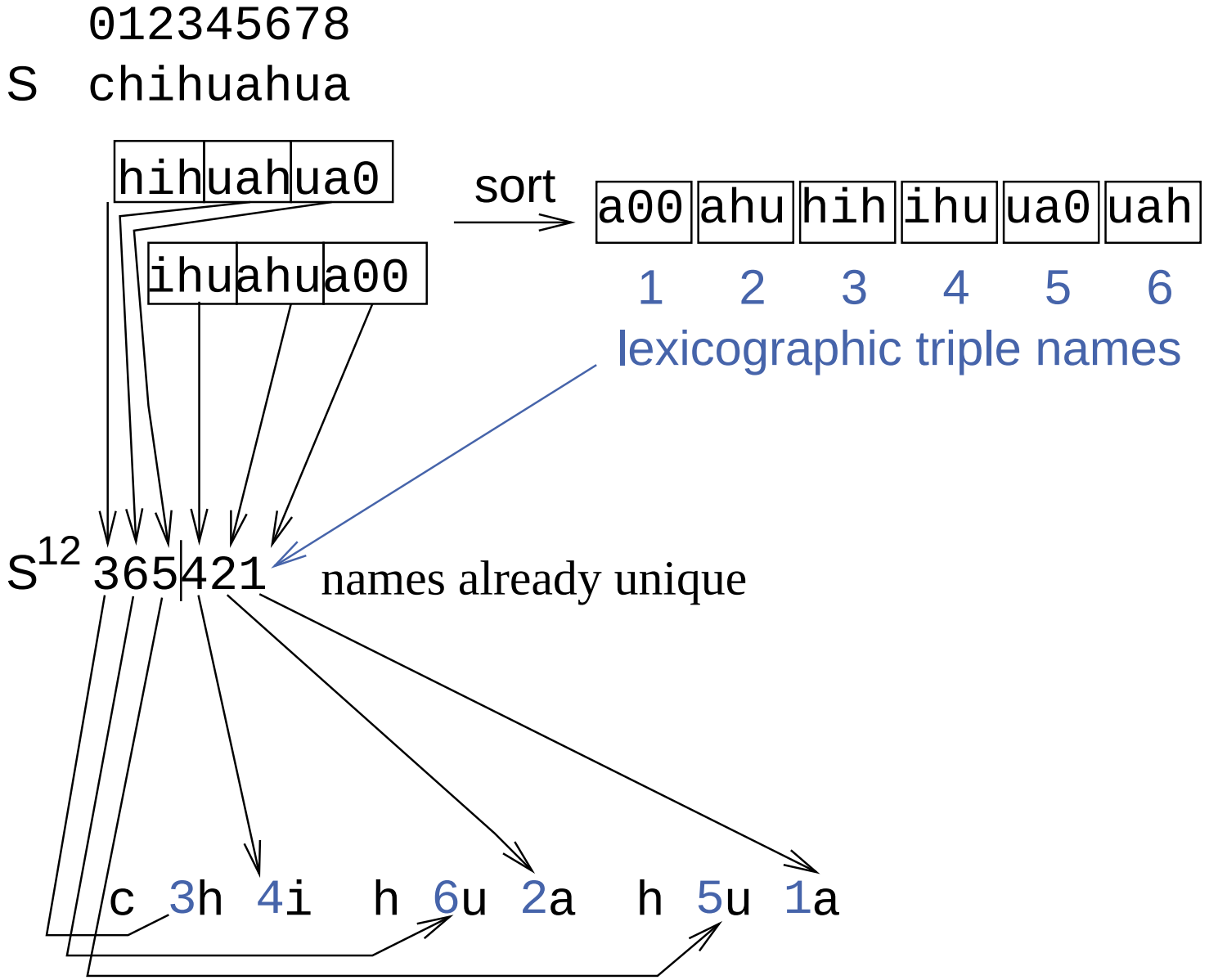
Stabiles Ganzzahliges Sortieren

Sortiere $a[0..n)$ nach $b[0..n)$ mit $\text{key}(a[i]) \in [0..n]$

$c[0..n] := [0,\ldots,0]$	Zähler
for $i \in [0..n)$ do $c[a[i]]{+}{+}$	zähle
$s := 0$	
for $i \in [0..n)$ do $(s, c[i]) := (s + c[i], s)$	Präfixsummen
for $i \in [0..n)$ do $b[c[a[i]]{+}{+}] := a[i]$	bucket sort

Zeit $O(n)$!

Rekursions-Beispiel: Einfacher Fall



Sortieren der mod 0 Suffixe

0	c $_3$(h $_4$i h $_6$u $_2$a h $_5$u $_1$a)
1	
2	
3	h $_6$(u $_2$a h $_5$u $_1$a)
4	
5	
6	h $_5$(u $_1$a)
7	
8	

Benutze Radix-Sort (LSD-Reihenfolge bereits bekannt)

Mische SA^{12} und SA^{0}

$0 < 1 \Leftrightarrow c\,n < c\,n$

$0 < 2 \Leftrightarrow cc\,n < cc\,n$

```
3: h 6u 2(ahua)
6: h 5u 1(a)
0: c 3h 4(ihuahua)
```

```
4: (6)u 2(ahua)
7: (5)u 1(a)
2: (4)i  h 6(uahua)
1: (3)h 4(ihuahua)
5: (2)a  h 5(ua)
8: (1)a 00 0(0)
```

$\Downarrow$

```
8: a
5: ahua
0: chihuahua
1: hihuahua
6: hua
3: huahua
2: ihuahua
7: ua
4: uahua
```

Analyse

1. Rekursion: $T(2n/3)$ plus

   Tripel extrahieren: $\mathrm{O}(n)$ (forall $i, i \bmod 3 \neq 0$ do ...)

   Tripel sortieren: $\mathrm{O}(n)$

   (e.g., LSD-first radix sort — 3 Durchgänge)

   Lexikographisches benenennen: $\mathrm{O}(n)$ (scan)

   Rekursive Instanz konstruieren: $\mathrm{O}(n)$ (forall names do ...)

2. $SA^0 =$sortiere $\{S_i : i \bmod 3 = 0\}$: $\mathrm{O}(n)$

   (1 Radix-Sort Durchgang)

3. mische SA^{12} and SA^0: $\mathrm{O}(n)$

   (gewöhnliches Mischen mit merkwürdiger Vergleichsfunktion)

Insgesamt: $T(n) \leq cn + T(2n/3)$

$\Rightarrow T(n) \leq 3cn = \mathrm{O}(n)$

Implementierung: Vergleichs-Operatoren

```
inline bool leq(int a1, int a2,   int b1, int b2) {
  return(a1 < b1 || a1 == b1 && a2 <= b2);
}
inline bool leq(int a1, int a2, int a3,   int b1, int b2, int b3) {
  return(a1 < b1 || a1 == b1 && leq(a2,a3, b2,b3));
}
```

Implementierung: Radix-Sortieren

```
// stably sort a[0..n-1] to b[0..n-1] with keys in 0..K from r
static void radixPass(int* a, int* b, int* r, int n, int K)
{ // count occurrences
  int* c = new int[K + 1];                          // counter array
  for (int i = 0;  i <= K;  i++) c[i] = 0;          // reset counters
  for (int i = 0;  i < n;  i++) c[r[a[i]]]++;     // count occurences
  for (int i = 0, sum = 0;  i <= K;  i++) { // exclusive prefix sums
     int t = c[i];  c[i] = sum;  sum += t;
  }
  for (int i = 0;  i < n;  i++) b[c[r[a[i]]]++] = a[i];      // sort
  delete [] c;
}
```

Implementierung: Tripel Sortieren

```
void suffixArray(int* s, int* SA, int n, int K) {
  int n0=(n+2)/3, n1=(n+1)/3, n2=n/3, n02=n0+n2;
  int* s12  = new int[n02 + 3];  s12[n02]= s12[n02+1]= s12[n02+2]=0;
  int* SA12 = new int[n02 + 3]; SA12[n02]=SA12[n02+1]=SA12[n02+2]=0;
  int* s0   = new int[n0];
  int* SA0  = new int[n0];

  // generate positions of mod 1 and mod  2 suffixes
  // the "+(n0-n1)" adds a dummy mod 1 suffix if n%3 == 1
  for (int i=0, j=0;  i < n+(n0-n1);  i++) if (i%3 != 0) s12[j++] = i;

  // lsb radix sort the mod 1 and mod 2 triples
  radixPass(s12 , SA12, s+2, n02, K);
  radixPass(SA12, s12 , s+1, n02, K);
  radixPass(s12 , SA12, s  , n02, K);
```

Implementierung: Lexikographisches Benennen

```
// find lexicographic names of triples
int name = 0, c0 = -1, c1 = -1, c2 = -1;
for (int i = 0;  i < n02;  i++) {
  if (s[SA12[i]] != c0 || s[SA12[i]+1] != c1 || s[SA12[i]+2] != c2) {
    name++;  c0 = s[SA12[i]];  c1 = s[SA12[i]+1];  c2 = s[SA12[i]+2];
  }
  if (SA12[i] % 3 == 1) { s12[SA12[i]/3]      = name; } // left half
  else                  { s12[SA12[i]/3 + n0] = name; } // right half
```

Implementierung: Rekursion

```
// recurse if names are not yet unique
if (name < n02) {
  suffixArray(s12, SA12, n02, name);
  // store unique names in s12 using the suffix array
  for (int i = 0;  i < n02;  i++) s12[SA12[i]] = i + 1;
} else // generate the suffix array of s12 directly
  for (int i = 0;  i < n02;  i++) SA12[s12[i] - 1] = i;
```

Implementierung: Sortieren der mod 0 Suffixe

```
for (int i=0, j=0;  i < n02;  i++) if (SA12[i] < n0) s0[j++] = 3*SA12[i];
radixPass(s0, SA0, s, n0, K);
```

Implementierung: Mischen

```
  for (int p=0,  t=n0-n1,  k=0;  k < n;  k++) {
#define GetI() (SA12[t] < n0 ? SA12[t] * 3 + 1 : (SA12[t] - n0) * 3 + 2)
    int i = GetI(); // pos of current offset 12 suffix
    int j = SA0[p]; // pos of current offset 0  suffix
    if (SA12[t] < n0 ?
        leq(s[i],       s12[SA12[t] + n0], s[j],       s12[j/3]) :
        leq(s[i],s[i+1],s12[SA12[t]-n0+1], s[j],s[j+1],s12[j/3+n0]))
    { // suffix from SA12 is smaller
      SA[k] = i;  t++;
      if (t == n02) { // done --- only SA0 suffixes left
        for (k++;  p < n0;  p++, k++) SA[k] = SA0[p];
      }
    } else {
      SA[k] = j;  p++;
      if (p == n0)  { // done --- only SA12 suffixes left
        for (k++;  t < n02;  t++, k++) SA[k] = GetI();
      }
    }
  }
  delete [] s12; delete [] SA12; delete [] SA0; delete [] s0; }
```

Verallgemeinerung: Differenzenüberdeckungen

Ein Differenzenüberdeckung D modulo v ist eine Teilmenge von $[0,v)$, so dass $\forall i \in [0,v) : \exists j,k \in D : i \equiv k - j \pmod{v}$.

Beispiel:

$\{1,2\}$ ist eine Differenzenüberdeckung modulo 3.

$\{1,2,4\}$ ist eine Differenzenüberdeckung modulo y 7.

- Führt zu platzeffizienterer Variante
- Schneller für kleine Alphabete

Verbesserungen / Verallgemeinerungen

- tuning
- größere Differenzenüberdeckungen
- Kombiniere mit den besten Alg. für einfache Eingaben

  [Manzini Ferragina 02, Schürmann Stoye 05, Yuta Mori 08]

Suffixtabellenkonstruktion: Zusammenfassung

- einfache, direkte, Linearzeit für Suffixtabellenkonstruktion
- einfach anpassbar auf fortgeschrittene Berechnungsmodelle
- Verallgemeinerung auf Diff-Überdeckungen ergibt platzeffiziente Implementierung